EXERCICE 1 **6 points**

QUESTIONS	RÉPONSES
1. L'équation $\ln(x+1)=3$ peut s'écrire : $\ln(x+1)=\ln(e^3)$ dont on déduit : $x+1=e^3$	☐ e^3 ☐ $\ln(2)$ ☑ e^3-1
2. $\exp(2x-6)=\exp\big(2\times(x-3)\big)2$	☐ $e^{2x}-e^6$ ☐ $\dfrac{2e^x}{e^6}$ ☑ $\left(e^{x-3}\right)^2$
3. $\ln(x^2)=\ln(e^2)$ donc $x^2=e^2$ par conséquent : $x^2-e^2=0$ ou encore : $(x-e)(x+e)=0$	☐ $\{-2\,;\,2\}$ ☑ $\{-e\,;\,e\}$ ☐ $\{e\}$
4. Nous savons que l'exponentielle est définie sur **R** et est toujours positive... donc à fortiori supérieure à -1. Par ailleurs l'inéquation $e^x<9$ équivaut à $x<\ln(9)$ et nous savons que $\ln(9)=2\ln(3)$.	☐ $]0\,;\,\ln(9)[$ ☑ $]-\infty\,;\,2\ln(3)[$ ☐ $]e^{-1}\,;\,e^9[$
5. Si une fonction admet pour asymptote la droite d'équation $y=0$, c'est qu'une limite à l'infini est égale à zéro :	☐ $\lim\limits_{x\to0}e^x=1$ ☑ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ☐ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$
6. Avec $f(x)=2\ln(x)-e$, $f(e)=2-e$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $f'(e=\dfrac{1}{e}$; et une formule $y-f(e)=f'(e)(x-e)$:	☐ $y=2x-e$ ☑ $y=\dfrac{2}{e}x-e$ ☐ $y=\dfrac{2e}{x}-1$

EXERCICE 2 **6 points**

1/ La dérivée $f'(x)$:

$$f(x)=-x^2+2x-\ln(2x+1)$$

$-x^2+2x$	$-2x+2$
$-\ln(2x+1)$	$-\dfrac{2}{2x+1}$
	$f'(x)=-2x+2-\dfrac{2}{2x+1}$

2/ Nous réduisons la dérivée au même dénominateur :

$$-\frac{4x^2-2x}{2x+1}=-\frac{2x(2x-1)}{2x+1}$$

Le tableau de signes se déduit de la factorisation :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x$	‖	+	0	−		−	
$2x-1$	‖	−		−	0	+	
$2x+1$	‖	+		+		+	
$f'(x)$	‖	−	0	+	0	−	

On pouvait aussi, en observant que sur l'intervalle d'étude $2x+1$ est positif, constater que le numérateur est une fonction polynôme du second degré, avec $a=-4$ négatif, ce qui signifie une parabole «renversée» et donc un tableau de signe du type $-|0|+|0|-$. Cela ne dispense pas de calculer les racines du polynôme.

3/ Analysons le tableau de variations de la gauche vers la droite :

- la fonction ln n'est pas définie en 0 donc $x \to \ln(2x+1)$ n'est pas définie en $-\frac{1}{2}$
- si x est très proche de $\frac{1}{2}$ alors $2x+1$ est très proche de zéro or nous savons que $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$;
- nous savons que $\ln(1)=0$ donc $f(0)=0$;
- $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+1-\ln(2)$ et $-\ln(2)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
- nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$ et que la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2+2x=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2=-\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty-\infty=-\infty$

4/ **a/** D'après le tableau de variations, dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ la fonction f est continue et strictement décroissante :

- d'une valeur positive : $f\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}06$
- vers une valeur négative : $f(1)=-1+2-2\ln(3)\approx -1{,}198$

donc $f(x)=0$ admet une unique solution α.

b/ Avec la calculatrice, nous trouvons $0{,}81<\alpha<0{,}82$.

5/ D'après la question précédente, f est positive avant α et négative après.

EXERCICE 3 **8 points**

1/ L'équation $f(x)=g(x)$ équivaut à

$$\frac{9-x}{x+1}=\frac{x}{2}$$

ou encore

$$18-2x=x^2+x$$

ou encore

$$x^2+3x-18=0$$

Cette équation du second degré a pour solutions -6 et 3.

2/ $\mathrm{I}=\displaystyle\int_3^9 f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{F}(9)-\mathrm{F}(3)$ avec F primitive de f ; par exemple $\mathrm{F}(x)=10\ln(x+1)-x$ (cette primitive se «devine» facilement à partir de la dérivée vue dans l'exercice 2) donc :

$$\mathrm{I}=\big(10\ln(10)-9\big)-\big(10\ln(4)-3\big)=10\ln(2{,}5)-6$$

3/ **a/** D'après le graphique, pour 40 euros, $x=4$, il y a 100 boîtes achetées, $y=1$, cela se vérifie : $f(4)=1$;

b/ À l'équilibre les deux courbes se croisent au point E ; par lecture graphique nous trouvons 30 euros et environ 150 boîtes ; nous savons par ailleurs (question 1) que $f(x)=g(x)$ pour $x=3$, donc 30 euros, et nous calculons $g(3)=1{,}5$ soit 150 boîtes.

4/ **a/** L'aire du triangle OAE vaut 2,25 u.a. soit 2 250 milliers d'euros.

b/ L'aire de ce domaine peut être calculée avec l'intégrale : $\displaystyle\int_3^9 f(x)\mathrm{d}x$. La valeur approchée de cette aire vaut 3,163 soit 3 163 euros..