1. Savoir restituer son cours *3 points*

Nous pouvons utiliser :
- le cours avec les suites géométriques de raison $|q| < 1$ qui sont convergentes ;
- le théorème des gendarmes en encadrant deux suites convergentes ;
- la définition en montrant que pour N *tg* on a $u_n \in [-h; h]$ avec h *tp*.

2. Savoir étudier une suite géométrique *3 points*

On donne la suite u définie par $\forall n \geqslant 0 \quad u_n = 3 - 27\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

1/ $u_0 = 3 - 27 = -24$; $u_1 = 3 - 9 = -6$; $u_2 = 3 - 3 = 0$

2/ La suite v définie par $\forall n \geqslant 1, \quad v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison inférieure à 1 donc convergente vers 0.

3/ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3 - 27 \times 0 = 3$

4/ La suite u est majorée par 3 et minorée par -24, elle est donc bornée.

3. Savoir démontrer la convergence d'une suite avec le théorème des gendarmes *2,5 points*

On donne la suite u définie par $\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$.

1/ Nous savons que $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant +1$ donc les deux suites $v_n = \frac{-1}{n^2}$ et $w_n = \frac{+1}{n^2}$ encadrent u.

2/ Si deux suites convergent vers une même limite l et qu'elles encadrent une troisième suite alors cette dernière converge aussi vers l.

3/ Nous avons vu que $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ or les deux suites v et w sont des suites de référence convergent vers 0 donc la suite u converge aussi vers 0.

4. Savoir démontrer la convergence d'une suite par application de la définition *2,5 points*

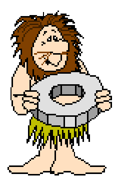
On donne la suite u définie par $\forall n \geqslant 2 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$.

1/ Si n est pair alors $u_n = \frac{1}{n-1}$ et si n est impair alors $u_n = \frac{-1}{n-1}$.

2/ Nous cherchons N tel que $u_\mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{N}-1} < 10^{-3}$... donc $\mathrm{N} > 10^3 + 1$. $\mathrm{N} = 1\,002$ convient.

3/ Nous cherchons N tel que $u_\mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{N}-1} < h$... donc $\mathrm{N} > \frac{1}{h} + 1$. Il est toujours possible de le calculer.

5. Savoir calculer une durée de demi-vie *2 points*



Le carbone 14 se désintègre à raison de 12 pour cent de sa masse initiale tous les 1000 ans. Donc sa masse sera déterminée par la suite géométrique $u_n = u_0\, 0{,}88^n$ où n est le nombre de millénaires écoulés et m_0 sa masse initiale.
Pour calculer la durée de demi vie, nous posons $m_n = 0{,}5\, m_0$ soit encore $0{,}88^n = 0{,}5$. Une recherche à la calculatrice nous indique que $0{,}88^5 \approx 0{,}53$ et que $0{,}88^6 \approx 0{,}46$. Par conséquent, nous prendrons $n = 6$ soit environ 6000 ans.

6. Savoir calculer un temps de doublement *2 points*

Un capital placé (intérêts capitalisés) au taux de 3,5% par an est multiplié par 1,035 chaque année. Ce capital suit donc la suite géométrique $c_n = c_0\, 1{,}035^n$ où n est le nombre d'années écoulées. Il aura doublé quand $c_n = 2c_0$ équation qui s'écrit aussi $1{,}035^n = 2$. La calculatrice nous permet de lire que $1{,}035^{20} \approx 1{,}99$ et que $1{,}035^{21} \approx 2{,}06$. Nous estimerons donc que le capital double en 21 ans.

Questionnaire à choix multiples *5 points*

QUESTIONS	RÉPONSES
1. Une somme de 20 termes d'une suite arithmétique : $1+3+5+\ldots+39 = 20 \times \dfrac{1+39}{2} = 400$	☐ 361 ☐ 441 ☑ 400
2. $S = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^8}-\dfrac{1}{2^9}\right) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{\dfrac{1023}{1024}}{3}$ car il s'agit de la somme de 10 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$	☐ $S=\dfrac{171}{512}$ ☑ $S=\dfrac{341}{1024}$ ☐ $S=\dfrac{1023}{1024}$
3. $u_n = n^2-2n = n^2\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ donc si n est *tg* alors $\dfrac{2}{n}$ est *tp* et $u_n \approx n^2$ donc sa limite à l'infini vaut	☑ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0
4. La suite géométrique de raison $\sqrt{3}$ est géométrique avec une raison supérieure à 1 ; son premier terme $u_1=-1$ est négatif donc la limite à l'infini de cette suite vaut	☐ $+\infty$ ☑ $-\infty$ ☐ 0
5. $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3} = \dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}$; si n est *tg* alors $\dfrac{3}{n}$ et $\dfrac{1}{2n}$ sont *tp* et $u_n \approx \dfrac{2n}{n}$; sa limite est donc	☐ $+\infty$ ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☑ 2

α βγδεηθφ **75 minutes** χλμνπρσ ω

1. Savoir restituer son cours *3 points*

Nous pouvons utiliser :
- le cours avec les suites géométriques de raison $|q| < 1$ qui sont convergentes ;
- le théorème des gendarmes en encadrant deux suites convergentes ;
- la définition en montrant que pour N *tg* on a $u_n \in [-h; h]$ avec h *tp*.

2. Savoir étudier une suite géométrique *3 points*

On donne la suite u définie par $\forall n \geqslant 0 \quad u_n = 2 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1/ $u_0 = 2 - 8 = -6$; $u_1 = 2 - 4 = -2$; $u_2 = 2 - 2 = 0$

2/ La suite v définie par $\forall n \geqslant 1, \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison inférieure à 1 donc convergente vers 0.

3/ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 - 8 \times 0 = 2$

4/ La suite u est majorée par 2 et minorée par -6, elle est donc bornée.

3. Savoir démontrer la convergence d'une suite avec le théorème des gendarmes *2,5 points*

On donne la suite u définie par $\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$.

1/ Nous savons que $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant +1$ donc les deux suites $v_n = \dfrac{-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{+1}{n^2}$ encadrent u.

2/ Si deux suites convergent vers une même limite l et qu'elles encadrent une troisième suite alors cette dernière converge aussi vers l.

3/ Nous avons vu que $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ or les deux suites v et w sont des suites de référence convergent vers 0 donc la suite u converge aussi vers 0.

4. Savoir démontrer la convergence d'une suite par application de la définition *2,5 points*

On donne la suite u définie par $\forall n \geqslant 0 \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

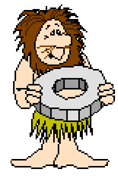
1/ Si n est pair alors $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et si n est impair alors $u_n = \dfrac{-1}{n+1}$.

2/ Nous cherchons N tel que $u_{\mathrm{N}} = \dfrac{1}{\mathrm{N}+1} < 10^{-3}$... donc $\mathrm{N} > 10^3 - 1$. $\mathrm{N} = 1\,000$ convient.

3/ Nous cherchons N tel que $u_{\mathrm{N}} = \dfrac{1}{\mathrm{N}+1} < h$... donc $\mathrm{N} > \dfrac{1}{h} - 1$. Il est toujours possible de le calculer.

5. Savoir calculer une durée de demi-vie *2 points*

Le carbone 14 se désintègre à raison de 12 pour cent de sa masse initiale tous les 1000 ans. Donc sa masse sera déterminée par la suite géométrique $u_n = u_0\, 0{,}88^n$ où n est le nombre de millénaires écoulés et m_0 sa masse initiale.
Pour calculer la durée de demi vie, nous posons $m_n = 0{,}5\, m_0$ soit encore $0{,}88^n = 0{,}5$. Une recherche à la calculatrice nous indique que $0{,}88^5 \approx 0{,}53$ et que $0{,}88^6 \approx 0{,}46$. Par conséquent, nous prendrons $n = 6$ soit environ 6000 ans.



6. Savoir calculer un temps de doublement *2 points*

Un capital placé (intérêts capitalisés) au taux de 4% par an est multiplié par 1,04 chaque année. Ce capital suit donc la suite géométrique $c_n = c_0\, 1{,}04^n$ où n est le nombre d'années écoulées. Il aura doublé quand $c_n = 2c_0$ équation qui s'écrit aussi $1{,}04^n = 2$. La calculatrice nous permet de lire que $1{,}04^{17} \approx 1{,}95$ et que $1{,}04^{18} \approx 2{,}03$. Nous estimerons donc que le capital double en 18 ans.

NOM : Prénom :

Questionnaire à choix multiples *5 points*

QUESTIONS	**RÉPONSES**
1. $S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^9}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1023}{1024}}{3}$ car il s'agit de la somme de 10 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$	☐ $S = \frac{171}{512}$ ☑ $S = \frac{341}{1024}$ ☐ $S = \frac{1023}{1024}$
2. Une somme de 20 termes d'une suite arithmétique : $1+3+5+\ldots+39 = 20 \times \frac{1+39}{2} = 400$	☐ 361 ☐ 441 ☑ 400
3. $u_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}$; si n est *tg* alors $\frac{3}{n}$ et $\frac{1}{2n}$ sont *tp* et $u_n \approx \frac{2n}{n}$; sa limite est donc	☐ $+\infty$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☑ 2
4. La suite géométrique de raison $\sqrt{3}$ est géométrique avec une raison supérieure à 1 ; son premier terme $u_1 = -1$ est négatif donc la limite à l'infini de cette suite vaut	☐ $+\infty$ ☑ $-\infty$ ☐ 0
5. $u_n = n^2 - 2n = n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)$ donc si n est *tg* alors $\frac{2}{n}$ est *tp* et $u_n \approx n^2$ donc sa limite à l'infini vaut	☑ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0