

NOM :

Prénom :

EXERCICE 1**7 points**La fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}$$

- 1/ **a/** Justifier que pour tout x de $[0 ; +\infty[$ on peut écrire $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$
b/ Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
c/ En déduire que la courbe \mathcal{C} , représentant f dans un repère orthonormé, possède une asymptote dont on précisera une équation.
- 2/ **a/** Calculer $f'(x)$.
b/ Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.
c/ Dresser le tableau de variations complet de f .
- 3/ **a/** Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 4]$.
b/ Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
- 4/ On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = -(x + 2)e^{-x}$$

La fonction g est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$. Comment pourrait-on le démontrer (la démonstration n'est pas demandée) ?

- 5/ Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.

Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$ est égale à

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

EXERCICE 2**6 points**

On donne ci-dessous la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage en France métropolitaine.

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
Proportion y_i en %	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

On souhaite effectuer un ajustement de la proportion en fonction de l'année.

- 1/ **a/** Construire le nuage de points de coordonnées (a_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal en respectant les consignes suivantes :
- sur l'axe des abscisses, on placera 1980 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm,
 - sur l'axe des ordonnées, on placera 10 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm.
- b/** Un ajustement affine semble-t-il adapté ? Commenter la réponse.
- 2/ On note a l'année et y la proportion, on pose $x = a - 1950$ et $t = \ln(x)$.
- a/** Compléter le tableau suivant :

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln(x_i)$	3,401					
y_i	11,4					

On donnera pour t des valeurs arrondies au millième.

- b/** Exprimer y en fonction de t par une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés (calculatrice). On arrondira les coefficients au dixième.
- c/** En déduire la relation : $y = 61,3\ln(x) - 197$.
- d/** Quel pourcentage du nombre d'enfants nés hors mariage (arrondi à 1 %), peut-on prévoir pour 2010 en utilisant cet ajustement ?
- e/** Montrer que l'on peut écrire : $x = A e^{B y}$ en donnant la valeur arrondie au dix millième pour A et au centième pour B.
- f/** À partir de quelle année peut-on prévoir que la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage sera supérieure à 60 % (si l'évolution se poursuit comme par le passé) ?

EXERCICE 3**7 points**

Une crêperie, située en bordure de la plage de Bernoulli-les-Bains, est ouverte de 12 à 18 heures. Elle propose des galettes (crêpes salées) et des crêpes (sucrées).

Une étude mercatique a montré que :

- chaque client n'achète qu'une seule crêpe ;
- 60 % des clients se présentent à l'heure du déjeuner (entre 12 heures et 14 heures) ;
- parmi les clients achetant une crêpe ou une galette l'après-midi (à partir de 14 heures), 80 % choisissent une crêpe (sucrée) ;
- la probabilité qu'un client achète une galette (crêpe salée) est égale à 0,62.

On appelle :

- D : l'événement « le client vient à l'heure du déjeuner ».
- G : l'événement « le client achète une galette (crêpe salée) ».

On pourra représenter les différentes situations par des arbres pondérés. Les résultats seront donnés sous forme décimale.

- 1/** Déterminer les probabilités des événements D et \bar{D} .
- 2/ a/** Un client est venu l'après-midi. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une galette (crêpe salée) ?
- b/** Calculer $p(\bar{D} \cap G)$.
- c/** En utilisant la «formule des probabilités totales», calculer $p(D \cap G)$.
- d/** Un client vient à l'heure du déjeuner ; montrer que la probabilité qu'il achète une galette (crêpe salée) est égale à 0,9.
- 3/** Un client a acheté une galette (crêpe salée) ; quelle est la probabilité, au centième près, qu'il soit venu l'après-midi ?
- 4/** La crêperie vend 3 euros une galette (crêpe salée) et 2 euros une crêpe (sucrée). Exprimer la loi de probabilité de la vente de crêpes puis l'espérance de cette loi. Que représente ce résultat ?
- 5/** La crêperie reçoit en moyenne 250 clients par jour pendant la saison et doit assumer 500 euros de charges quotidiennes liées à la vente des crêpes (location de la salle et du matériel, salaires, produits consommés, propreté des abords...).
- La crêperie est-elle a priori rentable pour l'investisseur ? Justifier la réponse.
- 6/** La patronne de la crêperie s'interroge sur l'utilité de faire des galettes (crêpes salées) dans l'après-midi. Pour s'économiser une nouvelle étude mercatique, elle décide de noter le type de crêpe commandée par quatre clients consécutifs faisant leur choix en toute indépendance à partir de 15 heures.
- Quelle est la probabilité qu'au moins un des quatre clients commande une galette (crêpe salée) ?

