*Le temps imparti (deux heures) ayant semblé à beaucoup d'élèves trop court, j'ai accordé une demi-heure supplémentaire au travers du barème (cinq points de mieux) afin que nul ne soit ou ne se sente lésé.*

**EXERCICE 1** **9 points**

**1/ a/** Nous savons que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ donc pour tout $x$ de $[0\,;\,+\infty[$ on peut écrire $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$

**b/** En $+\infty$, *l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x* donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**c/** La courbe $\mathscr{C}$, représentant $f$ dans un repère orthonormé, possède donc une asymptote $y = 0$ en $+\infty$.

**2/ a/** Calcul de la dérivée :

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $e^u$ | $u'e^u$ |
| $u : -x$ | $u' : -1$ |
| $e^{-x}$ | $-e^{-x}$ |
| $u \times v$ | $u'v + v'u$ |
| $u : x+1$ | $u' : 1$ |
| $v : e^{-x}$ | $v' : -e^{-x}$ |
| $f(x)$ | $f'(x) = e^{-x} + (x+1)\,(-e^{-x})$ |

Par conséquent : $f'(x) = -x\,e^{-x}$

**b/** Signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$ : nous savons que l'exponentielle est toujours positive et sur cet intervalle, $x$ est aussi positif ou nul ; par conséquent, $f'(x) \leqslant 0$.

**c/** Tableau de variations complet de $f$ :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | $1$ $\searrow$ | $0$ |

**3/ a/** D'après le tableau de variations, nous constatons que dans l'intervalle $[0\,;\,4]$ la fonction est continue et décroissante ; de plus, $f(0) = 1 > 0{,}5$ et $f(4) \approx 0{,}09 < 0{,}5$ donc l'équation $f(x) = 0{,}5$ possède une unique solution $\alpha$ sur cet intervalle.

**b/** Avec la calculatrice, nous trouvons $1{,}678 < \alpha < 1{,}679$.

**4/** La fonction $g$ est une primitive de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et nous pourrions le démontrer en calculant $g'(x)$ qui doit être égal à $f(x)$.

**5/** Valeur moyenne :

$$V_m = \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)\,dx = g(4) - g(0)$$

car nous savons que $g$ est une primitive de $f$. Par conséquent : $V_m = \dfrac{1}{4}\left(-6e^{-4} + 2\right) \approx 0{,}473$

**EXERCICE 2** **7 points**

**1/ a/** Voir le nuage.

**b/** Un ajustement affine ne semble pas adapté car le nuage n'est pas rectiligne.

**2/ a/** Le tableau :

| Année $a_i$ | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2003 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i = a_i - 1950$ | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 53 |
| $t_i = \ln(x_i)$ | 3,401 | 3,555 | 3,689 | 3,807 | 3,912 | 3,970 |
| $y_i$ | 11,4 | 19,6 | 30,1 | 37,6 | 42,6 | 45,2 |

**b/** D'après la calculatrice : $t_i = 61{,}27\,x_i + 196{,}98$.

**c/** On en déduit donc *par arrondi* la relation : $y = 61{,}3\ln(x) - 197$.

**d/** En 2010, $x = 60$ donc $y = 61{,}3\ \ln(60) - 197 \approx 0{,}54$, soit 54%.

**e/** L'ajustement $y = 61{,}3\ln(x) - 197$ nous donne $\ln(x) = \frac{1}{61{,}3}\left(y+197\right)$.

Par conséquent : $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{61{,}3}(y+197)} = \mathrm{e}^{\frac{197}{61{,}3}} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{61{,}3}y}$.

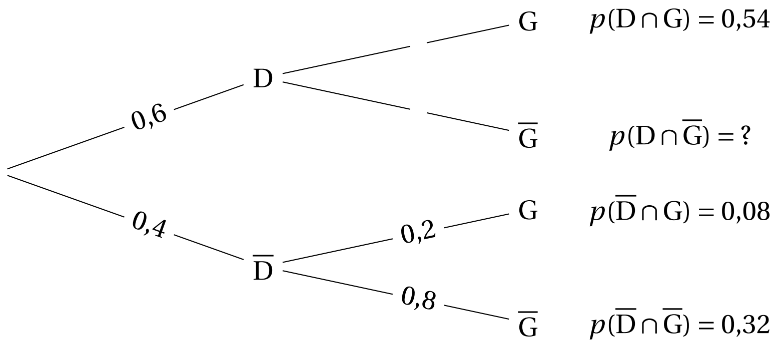
On en déduit que $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{\frac{1}{61{,}3}} \approx 24{,}87$ et que $\mathrm{B} = \dfrac{1}{61{,}3} \approx 0{,}0163$.

**f/** L'évolution est croissante donc nous résolvons l'équation $60 = 61{,}3\ln(x) - 197$ et obtenons $x \approx 66{,}2$. On trouve le même résultat en calculant : $24{,}87 \times \mathrm{e}^{0{,}0163\times 60}$.

C'est donc 67 ans après 1950, soit à partir de 2017, qu'il est prévisible que, si tout continue comme par le passé, le taux de naissance hors mariage dépassera 60%.

---

**EXERCICE 3** **9 points**




**1/** D'après l'énoncé, $p(\mathrm{D}) = 0{,}6$ et par conséquent $p(\overline{\mathrm{D}}) = 1 - p(\mathrm{D}) = 0{,}4$.

**2/** **a/** D'après l'énoncé, $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\overline{\mathrm{G}}) = 0{,}8$ donc $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{G}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

**b/** D'après les deux questions précédentes reportées sur l'arbre : $p\left(\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{G}\right) = 0{,}4\times 0{,}2 = 0{,}08$.

**c/** $p(\mathrm{G}) = p\,(\mathrm{G}\cap\mathrm{D}) + p\left(\mathrm{G}\cap\overline{\mathrm{D}}\right)$ donc $p\,(\mathrm{G}\cap\mathrm{D}) = p(\mathrm{G}) - p\left(\mathrm{G}\cap\overline{\mathrm{D}}\right) = 0{,}62 - 0{,}08 = 0{,}54$.

**d/** $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{G}) = \dfrac{p(\mathrm{D}\cap\mathrm{G})}{p(\mathrm{D})} = \dfrac{0{,}54}{0{,}6} = 0{,}9$.

**3/** $p_{\mathrm{G}}(\overline{\mathrm{D}}) = \dfrac{p(\mathrm{G}\cap\overline{\mathrm{D}})}{p(\mathrm{G})} = \dfrac{0{,}08}{0{,}62} \approx 0{,}13$.

**4/** La loi de probabilité :

| X | 3 | 2 |
|---|---|---|
| $p$(X) | 0,62 | 0,38 |

On en déduit l'espérance : $\mathrm{E(X)} = 3\times 0{,}62 + 2\times 0{,}38 = 2{,}62$. Cela représente le gain moyen par client sur un très grand nombre de clients.

**5/** Nous faisons la balance des dépenses et recettes journalières : $250\times 2{,}62 - 500 = 155$ donc la journée est a priori bénéficiaire et donc rentable pour l'investisseur.

**6/** Nous notons $p(\mathrm{G}\geqslant 1)$ l'événement : *au moins un des quatre clients commande une galette.*

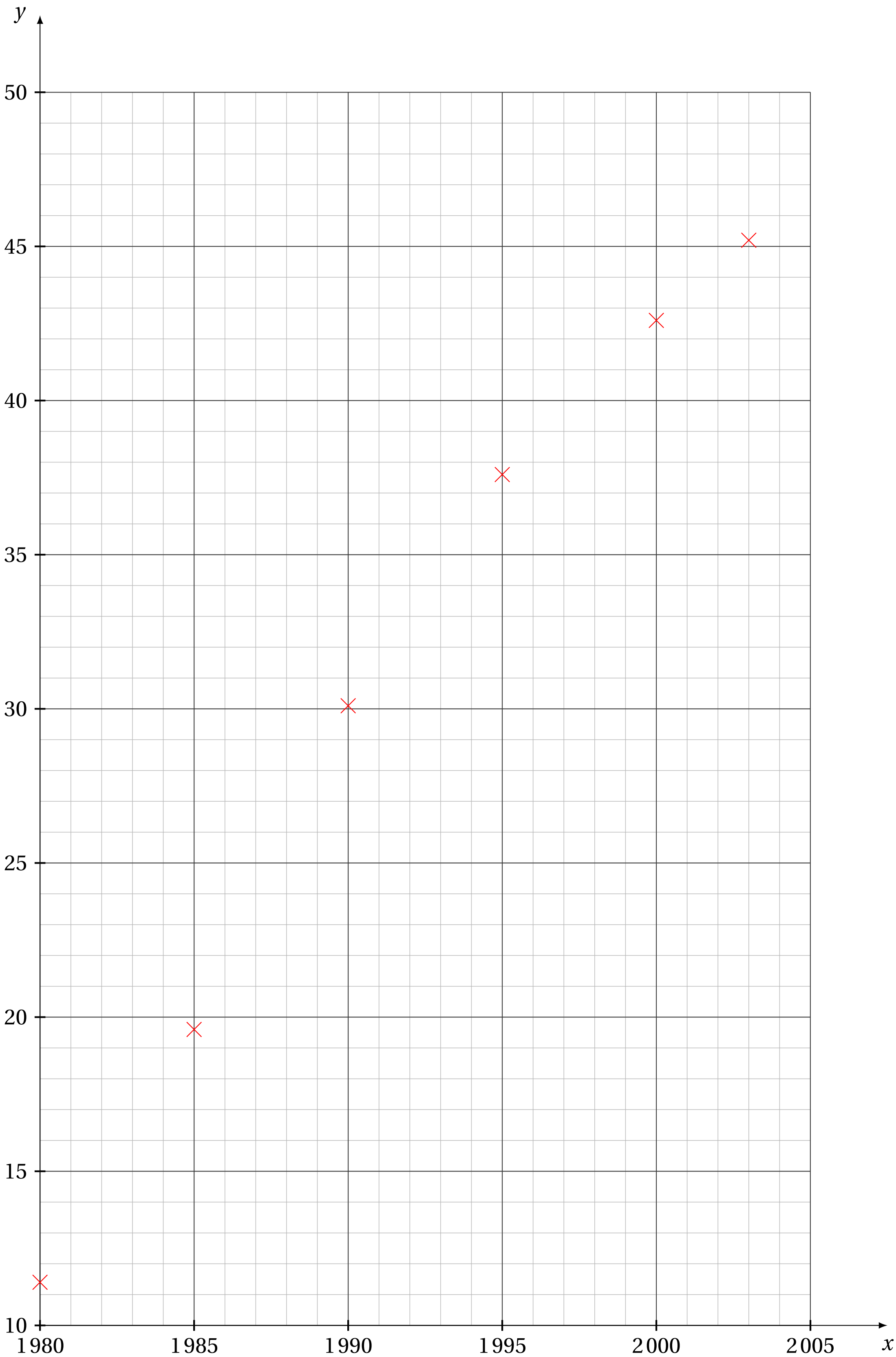
Cet événement a pour contraire : *aucun des quatre clients ne commande de galette* noté $p(\mathrm{G}=0)$.

D'après l'énoncé, les événements sont indépendants donc :

$p(\mathrm{G}=0) = p(\overline{\mathrm{G}})\cap p(\overline{\mathrm{G}})\cap p(\overline{\mathrm{G}})\cap p(\overline{\mathrm{G}})$

soit encore : $p(\mathrm{G}=0) = 0{,}8^4$.

Finalement : $p(\mathrm{G}\geqslant 1) = 1 - 0{,}8^4 \approx 0{,}59$


y
50
45
40
35
30
25
20
15
10
1980
1985
1990
1995
2000
2005
x