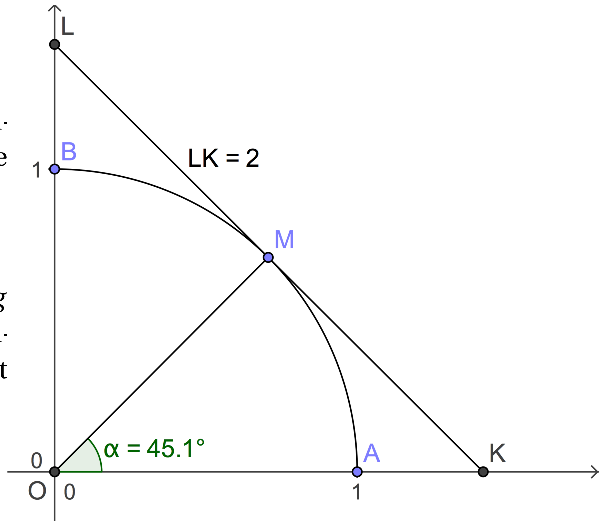
L'observation

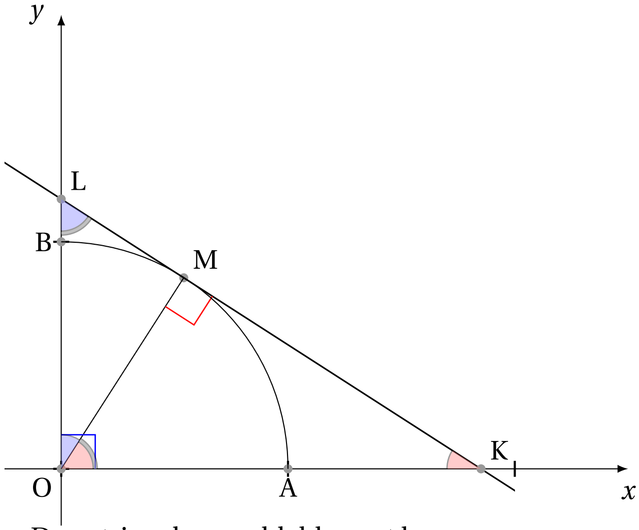
- À l'aide de Geogebra, en faisant varier la position du point M, nous constatons une distance minimum de 2 pour LK ;
- elle est obtenue pour $\alpha \approx 45°$ soit $\alpha \approx \pi/4$.
- La représentation graphique de la fonction g (voir page suivante) présente elle aussi un minimum de 2 pour une valeur approximativement semblable à la précédente : $0{,}79 \approx \pi/4$.



La conjecture

À partir de notre observation, nous supposons que le minimum de KL vaut 2 et qu'il est obtenu pour $\alpha = \pi/4$

La démonstration des triangles semblables et de ses conséquences



- Toute tangente au cercle est perpendiculaire au rayon sur lequel elle s'appuie : l'angle OMK est rectangle ;
- Les deux triangles OMK et LOK sont donc rectangles ;
- Les angles OLK et LOK sont complémentaires ;
- Dans LOK, les angles OLK et OKM sont complémentaires ;
- Dans OMK, les angles MOK et OKM sont complémentaires ;
- Les angles MOK et OLK sont donc égaux ;
- Les deux triangles ont leurs trois angles respectivement deux à deux égaux, ils sont semblables.
- Deux triangles semblables ont leurs mesures proportionnelles.
- On peut écrire la table de correspondance :

OMK	LOK
M	O
K	K
O	L

et par conséquent les égalités : $\dfrac{OK}{LK} = \dfrac{OM}{OL}$

- D'où l'on tire : $OM \times LK = OK \times OL$ soit $LK = OK\,OL$ car $OM = 1$.
- Dans le triangle OMK, $\cos(\alpha) = \dfrac{OM}{OK}$ donc $OK = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$.
- Dans le triangle OMK, $\sin(\alpha) = \dfrac{MK}{OK} = \dfrac{OM}{OL}$ donc $OL = \dfrac{1}{\sin(\alpha)}$.
- Finalement, $KL = OK\,OL = \dfrac{1}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}$

L'étude de la fonction $g : x \to \dfrac{1}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}$

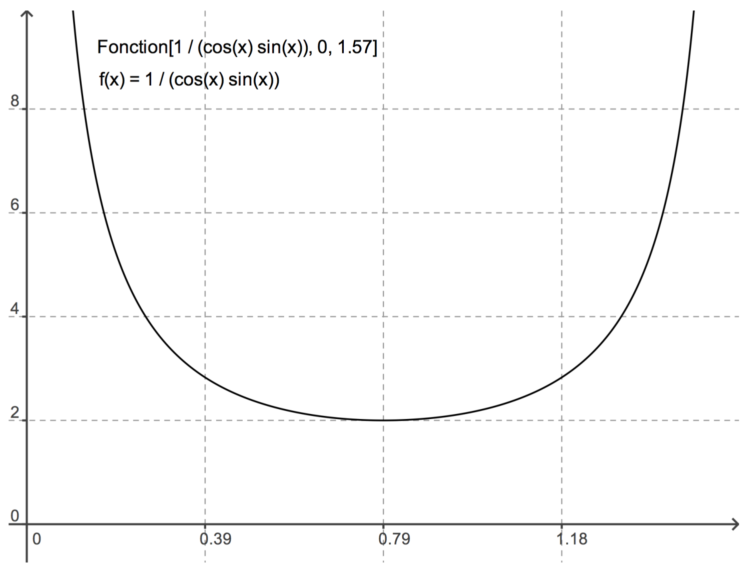
- Nous calculons la dérivée :

fonction	dérivée
$\dfrac{1}{w}$	$-\dfrac{w'}{w^2}$
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
$u : \cos(\alpha)$	$u' : -\sin(\alpha)$
$v : \sin(\alpha)$	$v' : \cos(\alpha)$
$w : \cos(\alpha)\sin(\alpha)$	$w' : -\sin(\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\alpha)$
	$g'(\alpha) = -\dfrac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{\big(\cos(\alpha)\sin(\alpha)\big)^2}$

- Nous étudions le signe de la fonction dérivée :
  - ∗ Le dénominateur est toujours positif (un carré) donc la dérivée est du signe opposé à celui du numérateur ;
  - ∗ Nous avons appris que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ donc $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$;
  - ∗ Si $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ alors $2\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(2\alpha) \geqslant 0$; si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$ alors $2\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$ et $\cos(2\alpha) \leqslant 0$.
- Le tableau de variations :

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(\alpha)$	‖	$-$	0	$+$	‖
g	‖	↘	2	↗	‖

- La représentation graphique de g réalisée avec Geogebra :



Conclusion

le minimum de g vaut bien 2 pour $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.