α βγδεηθφ **dernier ds** χλμνπρσ ω

1/ Savoir calculer une dérivée *3 pts*

Nous calculons la dérivée :

fonction	dérivée
$f : \dfrac{1}{w}$	$-\dfrac{w'}{w^2}$
$w = u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
$u : \cos(x)$	$u' : -\sin(x)$
$v : \sin(x)$	$v' : \cos(x)$
$w : \cos(x)\sin(x)$	$w' : -\sin(x)\sin(x) + \cos(x)\cos(x)$
	$f'(x) = -\dfrac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\big(\cos(x)\sin(x)\big)^2}$

2/ Savoir encadrer ou démontrer qu'une fonction est bornée *6 pts*

a/ Détermination des bornes de la fonction $f : x \longmapsto 1 - \sin(2x)$ définie sur $\mathbf{R}$:

Nous savons que les fonctions sinus et cosinus sont bornées (*que ce soit* $2x$ *ou* x *ou* $-1{,}4x$ *ne change rien à l'encadrement*) :

$\forall x \in \mathbf{R}$: $\quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad$ donc $\quad -1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$

ou encore $\quad -1 \leqslant -\sin(2x) \leqslant 1 \quad$ soit au final $\quad 0 \leqslant 1 - \sin(2x) \leqslant 2$

b/ D'après le tableau suivant...

x	0		$\frac{1}{3}$		1		4
Signe de $g'(x)$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

la fonction g admet un maximum local (local, c'est pas global...) en $\frac{1}{3}$ car la dérivée s'annule en passant de valeurs positives (la fonction g est croissante) à des valeurs négatives (la fonction g est décroissante).

c/ D'après ce tableau...

x	0		$\frac{1}{3}$		1		4
Variations de $h : x \to \sqrt{x(x-1)^2}$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	6

- la fonction admet un minimum local de 0 en 1 ;
- $h\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}385$; $\quad h(2) = \sqrt{2} \approx 1{,}414$; donc le maximum, c'est $\sqrt{2}$...

et sur $\left[\dfrac{1}{3} ; 2\right]$ le meilleur encadrement c'est : $\quad 0 \leqslant h(x) \leqslant \sqrt{2}$.

3/ Savoir utiliser le calcul des variations *3 pts*

a/ Nous montrons que le point R(2 ; 1) est un point des deux courbes représentant ces fonctions en prouvant que l'ordonnée de R est l'image par f et par g de son abscisse :

$f(2) = -\dfrac{1}{4} + 2 = 1 \quad$ et $\quad g(2) = \dfrac{1}{4} - 2 + 4 = 1$... la proposition est démontrée.

b/ Pour montrer que les deux courbes partagent une seule et même tangente T en R, nous montrons que les deux nombres dérivés (coefficients directeurs des deux tangentes ici confondues) sont égaux :

- $f'(x) = -\frac{1}{4} \times 2x + 0$ donc $f'(2) = -1$;
- $g'(x) = \frac{1}{4} \times 2x - 2 + 0$ donc $g'(2) = -1$;

donc la proposition est démontrée.

4/ Savoir faire correspondre les variations de la fonctions et le signe de la fonction dérivée *5 pts*

Décodage de l'énoncé :

- La courbe Γ passe par les points A(0 ; 2), donc $f(0) = 2$, C(−2 ; 0) donc $f(-2) = 0$, et la droite AB est la tangente en A à Γ donc avec $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ on a $m_{(AB)} = \frac{-2}{2} = -1 = f'(0)$;
- La tangente à Γ en son point D d'abscisse −1 est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-1) = 0$;
- Enfin, nous savons que la fonction désignée par g a pour dérivée la fonction f ci-dessous représentée donc $g'(x) = f(x)$.

a/ D'après notre *décodage* : $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$ et $g'(0) = f(0) = 2$.

b/ Le tableau de variations de la fonction f :

x		-1	
Variations de f	↗	2,8	↘

c/ Le tableau de signes de la fonction f' :

x		-1	
Signe $f'(x)$	+	0	−

d/ Le tableau de signes de la fonction f :

x		-2	
Signe $f(x)$	−	0	+

e/ Le tableau de variations de la fonction g :

x		-2	
Variations de g	↘		↗

5/ Savoir distinguer entre la courbe de la fonction et celle de sa dérivée *3 pts*

- D'après le tableau de signes de la fonction f', nous pouvons déduire que la courbe de f' est la courbe C (c'est la seule courbe correspondant) ;
- d'après le tableau de variations de la fonction g, nous pouvons déduire que la courbe de g est la courbe A car son minimum est en −2 (pour la courbe C, le minimum est en 0).