Informatique et suites numériques

Objectif

Il s'agit de vérifier que chaque élève de la classe a une connaissance suffisante du tableur (OpenOffice-calc) et de GeoGebra pour calculer des termes d'une suite numérique et de les représenter afin de conjecturer sur des résultats produits.

Situations

1. **En utilisant le tableur d'OpenOffice**
   On considère les suites a, b, u, v, w et t définies sur $\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= n \\
b_n &= a_n + a_{n+1} \\
u_n &= \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \ldots + b_n \\
v_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\
w_n &= b_n + b_{n+1} \\
t_{n+1} &= t_n + a_n \qquad \text{pour tout } n > 0 \quad \text{avec} \quad t_0 = 0
\end{aligned}$$

   – Créer une feuille donnant les vingt premiers termes de chaque suite.
   – Quelles remarques peut-on faire à propos de chacune de ces suites ?

   Appeler le professeur pour lui expliquer brièvement.

   – D'après cette feuille, que vaut la somme des 10 premiers entiers impairs ? Conjecturer ce que vaut celle des 1 000 premiers et généraliser la conjecture à la somme des n premiers.
   – Démontrer que $t_5 = \sum_{i=0}^{i=4} i$
   – Démontrer que $\sum_{i=0}^{i=n} (2i+1) = (n+1)^2$.

   Appeler le professeur pour lui montrer le résultat.

2. **En utilisant le tableur d'OpenOffice**
   On considère la suite définie par :

$$u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; u_0 = 7 \; ; \; f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$$

(a) Calculer les vingt premiers termes de cette suite en affichant le résultat sous forme de fraction <Format/Cellules.../Nombres/Fraction>.

Appeler le professeur pour lui montrer le résultat.

(b) Y a-t-il des valeurs de u_0 pour lesquelles le calcul est partiellement ou complètement impossible ? Lesquelles ?

Appeler le professeur pour lui montrer les valeurs repérées.

(c) En vous souvenant de la composition des fonctions, pouvez-vous donner une explication mathématique aux résultats trouvés ?

(d) Calculer l'expression algébrique de $f \circ f(x)$, de $f \circ f \circ f \circ (x)$ et de $f \circ f \circ f \circ f \circ (x)$.

(e) À partir du résultat précédent, expliquer les conjectures posées à partir de la feuille de calcul.

Appeler le professeur pour lui détailler l'explication.

3. **En utilisant Geogebra**

Construction de la suite récurrente calculée précédemment :

- créer la fonction affine associée à la *première bissectrice* : $d(x) = x$ (écrire dans la barre de <saisie>) ;
- créer la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-5}{x+1}$;
- créer le point A(7,0) ;
- créer (respecter l'ordre de saisie) ensuite les points :
  - $\mathrm{R} = (x(\mathrm{A}), f(x(\mathrm{A})))$
  - $\mathrm{S} = (f(x(\mathrm{A})), f(x(\mathrm{A})))$
  - $\mathrm{B} = (f(x(\mathrm{A})), 0)$
- tracer les segments [AR], [RS] et [SB] nommés (par GeoGebra) a, b et c ;
- décocher <Affichage de l'étiquette> pour chaque segment (clic-droit en partie gauche de l'écran) ;
- afficher ces segments en pointillés : <Propriétés/Style/Style du trait>
- dans "outil", sélectionner <Créer un nouvel outil> ;
- dans <Objet initiaux>, sélectionner A et f ;
- dans <Objets finaux>, sélectionner B, a, b et c ;
- donner un <Nom> pour l'outil, «Récur» par exemple...
- appliquer <Récurrence> sur le point B, puis sur son image, puis sur l'image de son image ;

Appeler le professeur pour lui montrer et lui expliquer le résultat.

Production demandée

- Une première feuille de tableur avec les suites a, b, u, v, w, t ;
- Un premier travail mathématique ;
- Une seconde feuille avec la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$;
- Un second travail mathématique ;
- Une feuille GeoGebra avec la représentation graphique de la suite récurrente.