

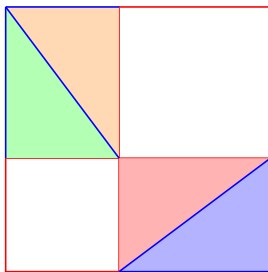
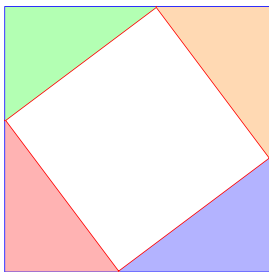
À la découverte du produit scalaire

MATHaZAY

Janvier 2009

- 1 De Pythagore à Al Kashi
- 2 D'Al Kashi au produit scalaire
- 3 À retenir
- 4 Applications
 - Trigonométrie : duplication et addition

De l'égalité à l'inégalité

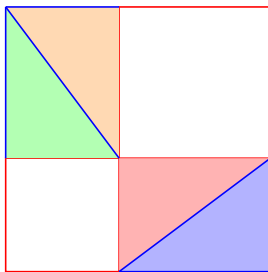
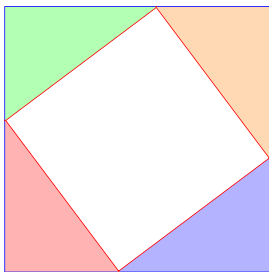


- Vers -500, un certain Pythagore nous lègue un théorème permettant de conclure à l'orthogonalité en B d'un triangle ABC au moyen d'une égalité de mesures :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- 1 900 ans après, un autre mathématicien, Al Kashi, pose et résout la question : «mais que devient cette égalité pour un triangle quelconque ?»

De l'égalité à l'inégalité



- Vers -500, un certain Pythagore nous lègue un théorème permettant de conclure à l'orthogonalité en B d'un triangle ABC au moyen d'une égalité de mesures :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

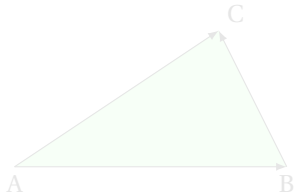
- 1 900 ans après, un autre mathématicien, Al Kashi, pose et résout la question : «mais que devient cette égalité pour un triangle quelconque ?»

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^e siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$



- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

$$2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

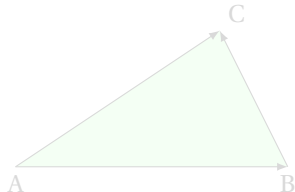
Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^e siècle : le vecteur.

- Considérons le «troisième côté» AC : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$



- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

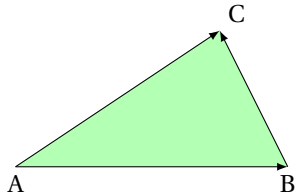
$$2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^e siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$



- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{AB} \vec{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

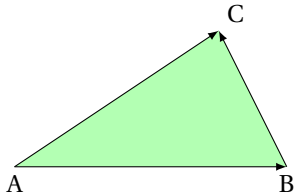
$$2\vec{AB} \vec{BC}$$

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^e siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$



- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{AB} \vec{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

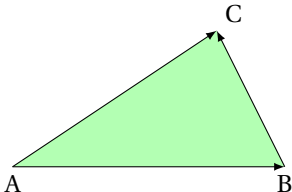
$$2\vec{AB} \vec{BC}$$

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^e siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$



- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{AB} \vec{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

$$2\vec{AB} \vec{BC}$$

Double produit

- Par comparaison avec le théorème de Pythagore, nous pouvons raisonnablement supposer que \overrightarrow{AB}^2 , \overrightarrow{BC}^2 et \overrightarrow{AC}^2 sont des carrés de mesures.
- Par la force des choses, le terme restant devrait *aussi* être homogène à un carré de mesure et donc le produit de vecteurs $2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}$ devrait comporter le produit de longueurs : $2ABBC$.
- Intéressons-nous à cette question : si on double les mesures d'un côté AB ou BC (en gardant l'angle \widehat{ABC} constant)... le produit $2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}$ (en valeur absolue) double-t-il aussi ? Faisons quelques essais.

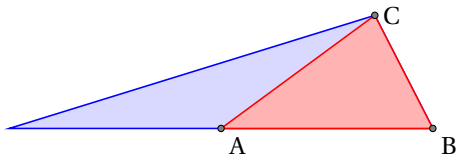
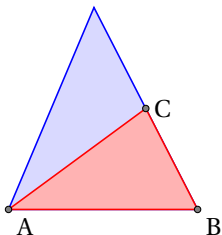
Double produit

- Par comparaison avec le théorème de Pythagore, nous pouvons raisonnablement supposer que \overrightarrow{AB}^2 , \overrightarrow{BC}^2 et \overrightarrow{AC}^2 sont des carrés de mesures.
- Par la force des choses, le terme restant devrait *aussi* être homogène à un carré de mesure et donc le produit de vecteurs $2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}$ devrait comporter le produit de longueurs : $2ABBC$.
- Intéressons-nous à cette question : si on double les mesures d'un côté AB ou BC (en gardant l'angle \widehat{ABC} constant)... le produit $2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}$ (en valeur absolue) double-t-il aussi ? Faisons quelques essais.

Double produit

- Par comparaison avec le théorème de Pythagore, nous pouvons raisonnablement supposer que \overrightarrow{AB}^2 , \overrightarrow{BC}^2 et \overrightarrow{AC}^2 sont des carrés de mesures.
- Par la force des choses, le terme restant devrait *aussi* être homogène à un carré de mesure et donc le produit de vecteurs $2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}$ devrait comporter le produit de longueurs : $2ABBC$.
- Intéressons-nous à cette question : si on double les mesures d'un côté AB ou BC (en gardant l'angle \widehat{ABC} constant)... le produit $2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}$ (en valeur absolue) double-t-il aussi ? Faisons quelques essais.

Doublons



AB	BC	AC	produit
5	3	4,5	13,75
5	6	5,79	27,5

AB	BC	AC	produit
5	3	4,5	13,75
10	3	9,03	27,5

Pas de doute, ce produit $2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ est bien proportionnel aux mesures des côtés...
 Reste donc à savoir s'il est strictement égal à $(2 \times AB \times BC)$ ou si un autre facteur,
 nommons le k , est présent, c'est à dire si : $2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = k \times (2 \times AB \times BC)$.

Le troisième côté

Reprenons un triangle dont nous allons faire varier l'angle $\alpha = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ (figure animée)

Le dernier facteur

- Calculons : $k = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$

- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0
α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? $\cos(\alpha)$ ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

Le dernier facteur

- Calculons : $k = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0
α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? $\cos(\alpha)$ ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

Le dernier facteur

- Calculons : $k = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0
α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
 - un cosinus ? $\cos(\alpha)$ ou...
 - serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

Le dernier facteur

- Calculons : $k = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0
α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? $\cos(\alpha)$ ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

Le dernier facteur

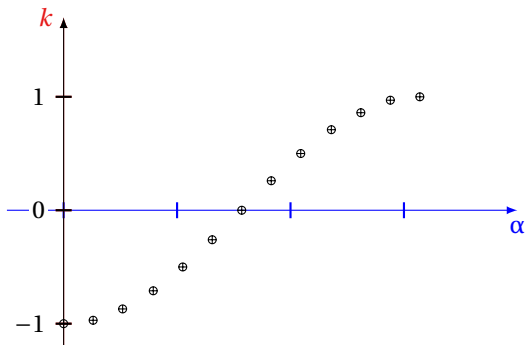
- Calculons : $k = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0
α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? $\cos(\alpha)$ ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

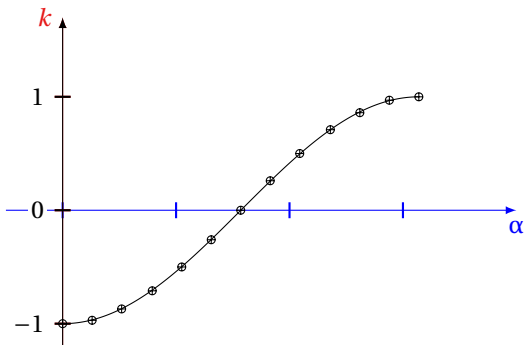
Le dernier facteur sonne toujours deux fois

- Reprenons les valeurs de k en fonction de α exprimé en radians :
- Et superposons la courbe de $\alpha \mapsto k = -\cos(\alpha)$



Le dernier facteur sonne toujours deux fois

- Reprenons les valeurs de k en fonction de α exprimé en radians :
- Et superposons la courbe de $\alpha \mapsto k = -\cos(\alpha)$



Pour tout triangle !

C'est gagné !

Et l'on peut écrire, pour tout triangle :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

... comme Al Kashi l'avait établi.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

- Par conséquent :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit scalaire** des deux vecteurs.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

- Par conséquent :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit scalaire** des deux vecteurs.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

- Par conséquent :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit scalaire** des deux vecteurs.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

- Par conséquent :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit scalaire** des deux vecteurs.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

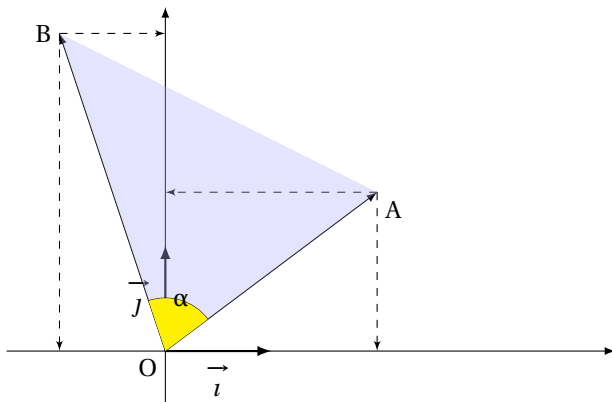
- Par conséquent :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit scalaire** des deux vecteurs.

Repérons-nous

- Plaçons nos deux vecteurs dans un repère orthonormé.

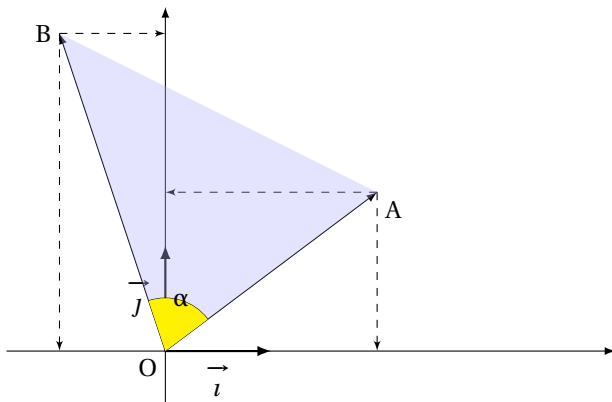


- Désignons par \vec{i} et \vec{j} les deux vecteurs à la base du repère :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot (x' \vec{i} + y' \vec{j})$$

Repérons-nous

- Plaçons nos deux vecteurs dans un repère orthonormé.



- Désignons par \vec{i} et \vec{j} les deux vecteurs à la base du repère :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot (x' \vec{i} + y' \vec{j})$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux mesures de longueur (norme de chaque vecteur) dans le produit :

- donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{i}} + xy' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{j}} + yx' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{i}} + yy' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{j}}$$

- Soit finalement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux mesures de longueur (norme de chaque vecteur) dans le produit :

- donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

- et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{i}} + xy' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{j}} + yx' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{i}} + yy' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{j}}$$

- Soit finalement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux mesures de longueur (norme de chaque vecteur) dans le produit :

- donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \vec{i} \cdot \vec{i} + xy' \vec{i} \cdot \vec{j} + yx' \vec{j} \cdot \vec{i} + yy' \vec{j} \cdot \vec{j}$$

- Soit finalement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux mesures de longueur (norme de chaque vecteur) dans le produit :

- donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \vec{i} \cdot \vec{i} + xy' \vec{i} \cdot \vec{j} + yx' \vec{j} \cdot \vec{i} + yy' \vec{j} \cdot \vec{j}$$

- Soit finalement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux mesures de longueur (norme de chaque vecteur) dans le produit :

- donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{i}} + xy' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{j}} + yx' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{i}} + yy' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{j}}$$

- Soit finalement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux mesures de longueur (norme de chaque vecteur) dans le produit :

- donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \vec{i} \cdot \vec{i} + xy' \vec{i} \cdot \vec{j} + yx' \vec{j} \cdot \vec{i} + yy' \vec{j} \cdot \vec{j}$$

- Soit finalement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux mesures de longueur (norme de chaque vecteur) dans le produit :

- donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

- par conséquent : $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \vec{i} \cdot \vec{i} + xy' \vec{i} \cdot \vec{j} + yx' \vec{j} \cdot \vec{i} + yy' \vec{j} \cdot \vec{j}$$

- Soit finalement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Deux premières formules

L'expression du produit scalaire :

- en fonction de l'angle des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

- en fonction des coordonnées des vecteurs (en repère orthonormé) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$$

Deux premières formules

L'expression du produit scalaire :

- en fonction de l'angle des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

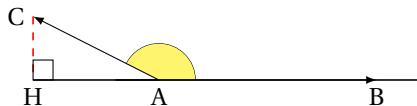
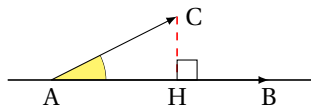
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

- en fonction des coordonnées des vecteurs (en repère orthonormé) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$$

Et une dernière pour la route

En fonction de la projection H de C sur (AB) :



- Si \vec{AB} et \vec{AH} sont de même sens, l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) est alors aigu :

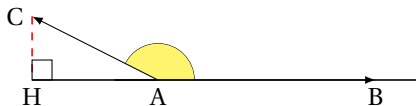
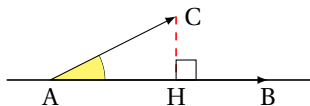
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$$

- Si \vec{AB} et \vec{AH} sont sens opposés, l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) est alors obtus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$$

Et une dernière pour la route

En fonction de la projection H de C sur (AB) :



- Si \vec{AB} et \vec{AH} sont de même sens, l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) est alors aigu :

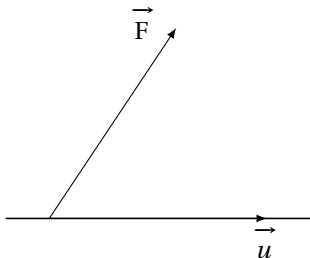
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$$

- Si \vec{AB} et \vec{AH} sont sens opposés, l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) est alors obtus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$$

En physique

En physique, le travail de la force \vec{F} dans le déplacement \vec{u}



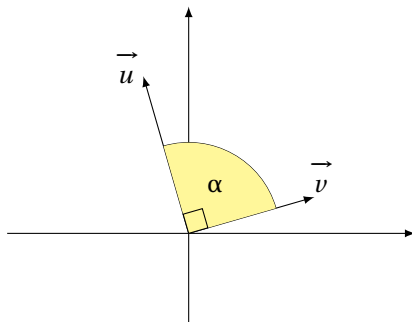
est donné par le produit scalaire

$$\vec{F} \cdot \vec{u}$$

Angle droit

Si les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

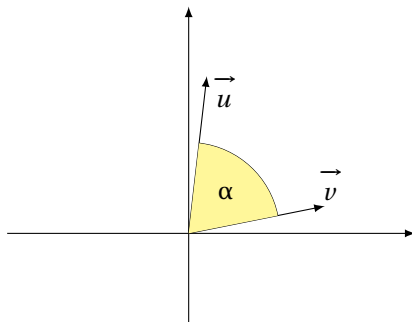


En physique, si $\vec{F} \cdot \vec{u} = 0$, on dira que le **travail de la force est nul**

Angle aigu

Si l'angle des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est inférieur à l'angle droit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$$

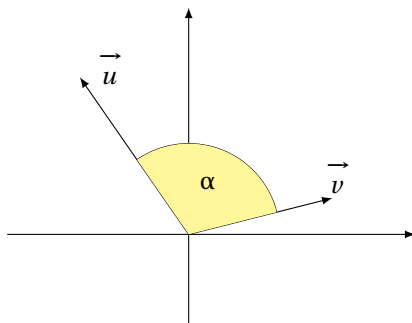


En physique, si $\vec{F} \cdot \vec{u} > 0$, on dira que le **la force est motrice**

Angle obtus

Si l'angle des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est supérieur à l'angle droit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$



En physique si $\vec{F} \cdot \vec{u} < 0$, on dira que le **la force est résistante**

Sommaire

- 1 De Pythagore à Al Kashi
- 2 D'Al Kashi au produit scalaire
- 3 À retenir
- 4 Applications**
 - **Trigonométrie : duplication et addition**

Figure de base

