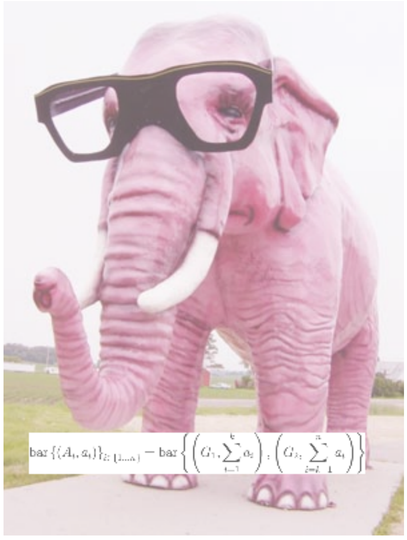
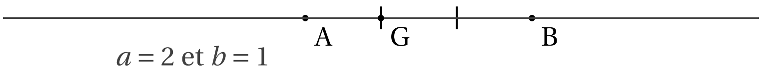
Exercice n°56 page 296 (Hyperbole)



Construction du barycentre et réécriture méthodique

Nous cherchons le barycentre de (A, 2) et (B, 1) :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$



Ainsi, nous savons que G est barycentre de (A, 2) et (B, 1), $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, ce qui nous mène à écrire :

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\left[\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right] + \left[\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right]$$

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \left[2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG}\right] + \left[2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right]$$

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$$

Recherche de lieux de points

- Si $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les points M, G A et B sont alignés car G est barycentre est de A et B donc sur la droite (AB). L'ensemble $\mathscr{E}_1$ est l'unique point M satisfaisant cette condition vectorielle : c'est le point A.

• Si $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = AB$ (attention, les deux membres de l'égalité sont des longueurs) alors $\|3\overrightarrow{MG}\| = AB$ soit encore $MG = \frac{1}{3}AB$
- L'ensemble des points M est à distance constante de G donc sur le cercle de centre G et de rayon égal au tiers de AB : $\mathscr{E}_2 = \mathscr{C}\left(G, \frac{1}{3}AB\right)$

• Si $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3MA$ (une égalité de distances) alors $3MG = 3MA$ ou $MG = MA$.
- M est à égale distance de A et de B donc l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des points M est la médiatrice du segment GA.

Les représentations