α β γ δ ϵ η θ ϕ **corrigés** χ λ μ ν π ρ σ ω

Probabilités

1/ Savoir établir une loi de probabilité

a/ On pose «X =mise+gain».

- La variable X peut prendre quatre valeurs :
  $-3\ (= -3+0)$, $0\ (= -3+3)$, $2\ (= -3+5)$ et $7\ (= -3+10)$
- Les probabilités associées sont déterminées par proportionnalité à l'angle de chaque secteur cible.
  Par exemple pour 150° : $\dfrac{150}{360} = \dfrac{5}{12}$
- La loi de probabilité de X :

X	-3	0	2	7
$p(X)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

b/ La probabilité d'un bilan positif ou nul :

$$p(X \geqslant 0) = p(X=0) + p(X=2) + p(X=7) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

c/ L'espérance de la variable X :

$$\mu = E(X) = -3 \times \frac{5}{12} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{12} = -\frac{1}{\;} \approx -0,33$$

d/ Ce jeu n'est pas équitable car l'espérance est négative donc sur un *très grand* nombre de jeux, le joueur perdra environ 0,33 € .

2/ Savoir modéliser avec un tableau

a/ Modélisation l'univers Ω par un tableau : nous mettons directement les valeurs de X dans les cases :

Dés	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

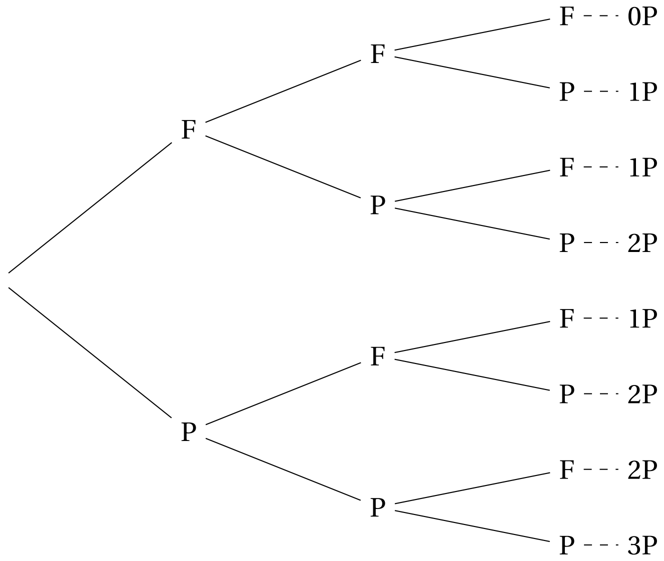
b/ $\text{card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$

c/ La loi de probabilité de X :

X	0	1	2	3	4	5
$p(X)$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

3/ Savoir modéliser avec un arbre

a/ L'arbre modélisant Ω et les valeurs de la variable :



b/ $\text{card}(\Omega) = 8$: il y a huit feuilles à notre arbre.

c/ $p(X = 2)$ c'est la probabilité de tirer deux «Pile» exactement en trois coups, d'après l'arbre : $p(X = 2) = \dfrac{3}{8}$.

4/ Savoir calculer les paramètres d'une variable aléatoire *2 pts*

a/ Nous savons que la somme des probabilités d'une loi vaut 1 donc :

$$p_3 = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$$

b/ Les paramètres de la loi de probabilité :

- $\mu = E(X) = 1 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{1}{4} + 5 \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{35}{12}$
- $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \left(1^2 \times \dfrac{1}{3} + 2^2 \times \dfrac{1}{4} + 5^2 \times \dfrac{5}{12}\right) - \left(\dfrac{35}{12}\right)^2 = \dfrac{467}{144}$
- $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \dfrac{\sqrt{467}}{12}$

Dérivation

1/ Savoir encadrer ou démontrer qu'une fonction est bornée *4 pts*

a/ Pour déterminer les bornes de la fonction $f : x \longmapsto 1 - 2\sin(x)$ définie sur $\mathbf{R}$, nous nous souvenons que les fonctions sinus et cosinus sont bornées :

$\forall x \in \mathbf{R}$: $\quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad$ donc $\quad -2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2$

ou encore $\quad -2 \leqslant -2\sin(x) \leqslant 2 \quad$ soit au final $\quad -1 \leqslant 1 - 2\sin(x) \leqslant 3$

b/ D'après le tableau suivant.

x	0		$\frac{1}{3}$		1		4
Signe de $g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

la fonction g admet un maximum local en $\frac{1}{3}$ car la dérivée s'annule en passant de valeurs positives (la fonction g est croissante) à des valeurs négatives (la fonction g est décroissante).

c/ D'après le tableau qui suit :

x	0		$\frac{1}{3}$		1		4
Variations de $h : x \to \sqrt{x(x-1)^2}$	0	↗	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0	↗	6

- la fonction admet un minimum local de 0 en 1 ;
- $h\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0,385$; $\qquad h(2) = \sqrt{2} \approx 1,414$; donc le maximum, c'est $\sqrt{2}$...

et sur $\left[\dfrac{1}{3} ; 2\right]$ le meilleur encadrement c'est : $\quad 0 \leqslant h(x) \leqslant \sqrt{2}$.

2/ Savoir utiliser le calcul des dérivées *3 pts*

a/ Nous montrons que le point R(2 ; 1) est un point des deux courbes représentant ces fonctions en prouvant que l'ordonnée de R est l'image par f et par g de son abscisse :

$f(2) = -\dfrac{1}{4} + 2 = 1 \quad$ et $\quad g(2) = \dfrac{1}{4} - 2 + 4 = 1$... la proposition est démontrée.

b/ Pour montrer que les deux courbes partagent une seule et même tangente T en R, nous montrons que les deux nombres dérivés (coefficients directeurs des deux tangentes ici confondues) sont égaux :

- $f'(x) = -\dfrac{1}{4} \times 2x + 0$ donc $f'(2) = -1$;
- $g'(x) = \dfrac{1}{4} \times 2x - 2 + 0$ donc $g'(2) = -1$;

donc la proposition est démontrée.

3/ Savoir faire correspondre les variations de la fonctions et le signe de la fonction dérivée *2 pts*

Décodage de l'énoncé :

- La courbe Γ passe par les points A(0 ; 2), donc $f(0) = 2$, C(−2 ; 0) donc $f(-2) = 0$, et la droite AB est la tangente en A à Γ donc avec $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ on a $m_{(AB)} = \dfrac{-2}{2} = -1 = f'(0)$;
- La tangente à Γ en son point D d'abscisse −1 est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-1) = 0$;
- Enfin, nous savons que la fonction désignée par g a pour dérivée la fonction f ci-dessous représentée donc $g'(x) = f(x)$.

a/ D'après notre *décodage* : $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$ et $g'(0) = f(0) = 2$.

b/ Le tableau de variations de la fonction f :

x		-1	
Variations de f	$\nearrow$	$2{,}8$	$\searrow$

c/ Le tableau de signes de la fonction f' :

x		-1	
Signe $f'(x)$	$+$	0	$-$

d/ Le tableau de signes de la fonction f :

x		-2	
Signe $f(x)$	$-$	0	$+$

e/ Le tableau de variations de la fonction g :

x		-2	
Variations de g	$\searrow$		$\nearrow$

4/ Savoir distinguer entre la courbe de la fonction et celle de sa dérivée *1 pt*

- D'après le tableau de signes de la fonction f', nous pouvons déduire que la courbe de f' est la courbe A (c'est la seule courbe correspondant) ;
- d'après le tableau de variations de la fonction g, nous pouvons déduire que la courbe de g est la courbe B car son minimum est en −2 (pour la courbe C, le minimum est en 0).