α βγδεηθφ

Devoir volontaire

χλμνπρσ ω

Une propriété caractéristique

La fonction exponentielle est une fonction qui transforme les sommes en produits : pour tous réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
Le but de ce DV est de rechercher toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ qui vérifient cette propriété.
Par la suite, f est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tous réels x et y la fonction f vérifie l'égalité :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \qquad \text{(équation 1)}$$

1/ Démontrez que s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$, alors f est la fonction nulle. Une suggestion : on pourra calculer, pour tout réel x, $f(x_0 + x)$.

2/ Dans la suite, on suppose f solution de l'(équation 1) et distincte de la fonction nulle.

a/ En prenant $y = 0$, démontrez que $f(0) = 1$.

b/ En prenant $x = y = (\mathrm{X}/2)$, démontrez que pour tout réel X, $f(\mathrm{X}) > 0$.

3/ Supposons x fixé et considérons la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g(y) = f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

a/ Démontrez que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que pour tout réel y,

$$g'(y) = f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$$

b/ Nous supposons que cette égalité est aussi vraie pour tout réel x... déduisez-en que

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f'(x) = f'(0) \times f(x) = a\,f(x)$$

avec $a = f'(0)$.

c/ Nous constatons ainsi que f est la solution de l'équation différentielle $y' = ay$ telle que $f(0) = 1$. Déduisez-en que

$$f(x) = e^{ax}$$

4/ Réciproquement, a est un réel et f est la fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^{ax}$. Démontrez que pour tous réels x et y,

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$