Approximation affine d'une fonction et méthode d'Euler

I- Approximation affine d'une fonction

Soit $A\big(a; f(a)\big)$ un point appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie sur un intervalle I de **R** et dérivable en un réel a de I. On considère les points M et M' de même abscisse $a+h$, avec M appartenant à $\mathscr{C}_f$ et M' appartenant à la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A. Au voisinage du point A, le point M est proche du point M', ce qui se traduit numériquement par :

- pour h proche de 0, $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$
- pour x proche de a (donc $x = a+h$ avec h très petit), $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$ (on a ici $h = x - a$)

Propriété (admise) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de **R** et dérivable en a appartenant à I alors la fonction

$$x \longmapsto f(x) + (x-a)f'(a) \qquad \big(\text{resp.} \quad h \longmapsto f(a) + f'(a)h\big)$$

est une approximation affine locale de f au voisinage de a (resp. est une approximation affine de f pour h très petit).

Remarque :

L'erreur commise, en valeur absolue, en remplaçant $f(a+h)$ par $f(a) + hf'(a)$ est la distance MM$'$.

$$\mathrm{MM}' = |f(a+h) - f(a) - hf'(a)| = |h \times \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right]|$$

Or, si h tend vers 0, alors $\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ tend vers $f'(a)$ et donc, MM$'$ tend vers 0.

En déduire que lorsque h est proche de 0 alors l'erreur commise MM$'$ est inférieure à $|h|$.

Remarque liée à la physique :

Pour h proche de 0, $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ ou encore $f(x+h) - f(x) \approx hf'(x)$.

En posant : $\Delta x = (x+h) - x$ et $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, la formule de l'approximation affine s'écrit alors : $\Delta f \approx \Delta x f'(x)$. Par *passage à la limite*, nous arrivons à l'écriture symbolique appelée *écriture différentielle* :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x \qquad \text{puis à} \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

II- Quelques approximations affines classiques en 0

$f(x)$	$f(0)$	$f'(0)$	Approximation affine
$(1+x)^2$			
$\sqrt{1+x}$			
$\dfrac{1}{1+x}$			
$(1+x)^3$			
$(1+x)^n$			
$\sin(x)$			
$\cos(x)$			

Montrer que, pour les approximations concernant les trois première lignes du tableau, l'erreur commise ne dépasse pas un réel de la forme λx^2, pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

Application :

Expliquer comment calculer, *sans calculatrice*, une valeur approchée des nombres réels suivants :

$$A = 1,001^2 \quad B = 0,995^2 \quad C = \sqrt{1,02} \quad D = \sqrt{0,996}$$
$$E = \frac{1}{1,003} \quad F = \frac{1}{0,9992} \quad G = \sin(-0,002) \quad H = \cos(0,01)$$

III- Construction approchée d'une courbe intégrale par la méthode d'Euler

Il est habituel de définir une fonction f par la donnée de l'expression algébrique $f(x)$; il est cependant fréquent que l'on aborde un problème avec une fonction sans avoir la connaissance de l'expression $f(x)$ mais en ayant la connaissance de sa dérivée (vitesse liée au phénomène observé) et d'une valeur en un point (condition initiale), notamment en physique.

Dans les exemples suivants, on vous donne la dérivée et une condition initiale ; on vous demande, en utilisant la formule de l'approximation affine, de construire une courbe ou des courbes « approchant » la courbe représentative de cette fonction.

Le principe et la construction

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère. Cette fonction n'est pas connue mais on suppose que sa dérivée f' l'est. À partir d'un point $M_0(x_0 ; y_0)$ connu de $\mathscr{C}_f$, la méthode d'Euler permet, grâce à f', de tracer une ligne polygonale qui représente approximativement la courbe $\mathscr{C}_f$.

1/ On place le point $M_0(x_0 ; y_0)$ qui est un point exact, connu, de la courbe $\mathscr{C}_f$. On choisit un pas $h \neq 0$ mais proche de 0.

2/ On pose $x_1 = x_0 + h$, alors $f(x_1) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.
On pose $y_1 = y_0 + hf'(x_0)$ Et on place le point $M_1(x_1 ; y_1)$.

3/ On pose $x_2 = x_1 + h$ alors $f(x_2) = f(x_1 + h) \approx f(x_1) + hf'(x_1)$.
On pose $y_2 = y_1 + hf'(x_1)$ Et on place le point $M_2(x_2 ; y_2)$. Et ainsi de suite ...

4/ On trace les segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$,...

Remarque : plus le pas h sera proche de 0, plus la ligne polygonale sera proche de $\mathscr{C}_f$.

Applications (faire les calculs d'abord avec la calculatrice puis, en salle informatique, avec le tableur)

1/ a/ Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ construire deux approximations de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[0 ; 4]$ sachant que $f(0) = 1$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2 - \dfrac{x}{2}$
(Utiliser la méthode d'Euler avec un pas de 1, puis avec un pas de 0,5)

b/ Dans le même repère construire l'arc de parabole d'équation $y = -\dfrac{x^2}{4} + 2x + 1$ sur le même intervalle. Cet arc peut-il être $\mathscr{C}_f$?
On admettra pour le moment que la connaissance de la dérivée et de la valeur en un point nous assure l'unicité de la fonction.

2/ Dans un nouveau repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire trois approximations de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[1 ; 3]$ sachant que $f(1) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
(prendre un pas de 1, puis un pas de 0,5 et enfin un pas de 0,1).

3/ Sachant que $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$, on appelle h le pas et on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = x_n + h$, et la suite (y_n) définie par : $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = f(x_{n+1}) = f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n)$.

a/ Dans le même repère qu'à l'exemple 2, construire trois approximations de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[0 ; 2]$ (les pas seront successivement 1 ; 0,5 ; 0,1).

b/ Quelle est la nature des suites (x_n) et (y_n) ?

c/ Quelle est l'expression de x_n et y_n en fonction de n et h ?