EXERCICE 1 **8 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1/ **a/** Calculer u_1.

b/ Les dix valeurs suivantes de la suite u_n sont connues :

u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
45	77	117	165	221	285	357	437	525	621

À partir de ces données, **conjecturer** la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$d_n = u_{n+1} - u_n$$

2/ On considère maintenant la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à :

$$4n^2 + 12n$$

3/ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 4n^2 + 12n + 5$$

Pour la transmission, on écrira l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n puis on remplacera u_n par son expression admise au rang n.

4/ Valider la conjecture émise à la question **1/b/**.

Tourner la page

EXERCICE 2 **12 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Prologue

À l'aide de la calculatrice, représenter **soigneusement** la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ (*on ne demande pas de la représenter*).

1/ Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbf{R}$.

2/ En déduire le signe de g.

3/ Justifier à l'aide de la question précédente que : pour tout x, $(\mathrm{e}^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

On rappelle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$

1/ a/ Vérifier que $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1$

b/ Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ en s'appuyant sur le résultat de la question précédente.

c/ Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2/ Étudier les variations de f et conclure par son tableau de variations.

3/ a/ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

b/ À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T).

4/ Tracer la droite (T) et les asymptotes dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$.