α β γ δ ϵ η θ ϕ **Devoir surveillé (110 min)** χ λ μ ν π ρ σ ω

Exercice 1 *(8 pts)*

1/ C'est du calcul, rien que du calcul.

$$a = (4+3i)^3 = -44+117i \qquad b = \frac{3+2i}{3-2i} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$$

2/ Rien de bien nouveau depuis la troisième...

$$\begin{cases} L_1: & -2ia-3b & = 4 \\ L_2: & a-3ib & = i \end{cases} \qquad \begin{cases} -iL_1: & 2a+3ib & = -4i \\ L_2: & a-3ib & = i \end{cases} \qquad \begin{cases} L_2-iL_1: & 3a & = -3i \\ \text{donc} & a & = -i \\ \text{et} & b & = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

3/ Première idée : un module est un réel donc il faut que $\Im\mathrm{m}(\overline{z}) = 2i$ soit encore que $\Im\mathrm{m}(z) = -2i$... nous éliminons les deux dernières propositions.

Nous calculons alors le module qui est le même pour les quatre propositions :

$|z|^2 = \dfrac{64}{9}+4 = \dfrac{10}{3}$ donc $z = \dfrac{1}{3}(-1+2i)$

Et nous en déduisons $\overline{z}$ puis $z = \dfrac{8}{3} - 2i$.

4/ $i(x+iy)-2(x-iy) = i$ donne $(-y-2x)+i(x+2y) = 0+i$

L'équation se résout en posant l'égalité des parties réelles et des parties imaginaires :

$-y-2x = 0$ et $x+2y = 1$

et ce système a pour solution unique $z = -\dfrac{1}{3} + i\dfrac{2}{3}$

Exercice 2 *(4 pts)*

1/ L'image N de $\overline{z}$ est symétrique de l'image M de z par rapport à l'axe des réels.

2/ L'image P de $-z$ est symétrique de l'image M de z par rapport à l'origine.

3/ L'image Q de z^2 est telle que $OQ = OM^2$ et $\arg(z^2) = 2\arg(z)$.

4/ Calculons : $i(x+iy) = -y+ix$ donc $\Im\mathrm{m}(iz) = \Re\mathrm{e}(z)$ et $\Re\mathrm{e}(iz) = -\Im\mathrm{m}(z)$.

Exercice 3 *(8 pts)*

On pose : $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1/ $z^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z^3 = -1$.

2/ D'après la question précédente

$z^4 = z^3 \times z = -z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad z^5 = z^3 \times z^2 = -z^2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z^6 = \left(z^3\right)^2 = 1$

3/ En reprenant les calculs précédents :

$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5 = 1+z+z^2-1-z-z^2 = 0$

4/ Il y a 2010 termes dans cette somme de termes d'une suite géométrique donc :

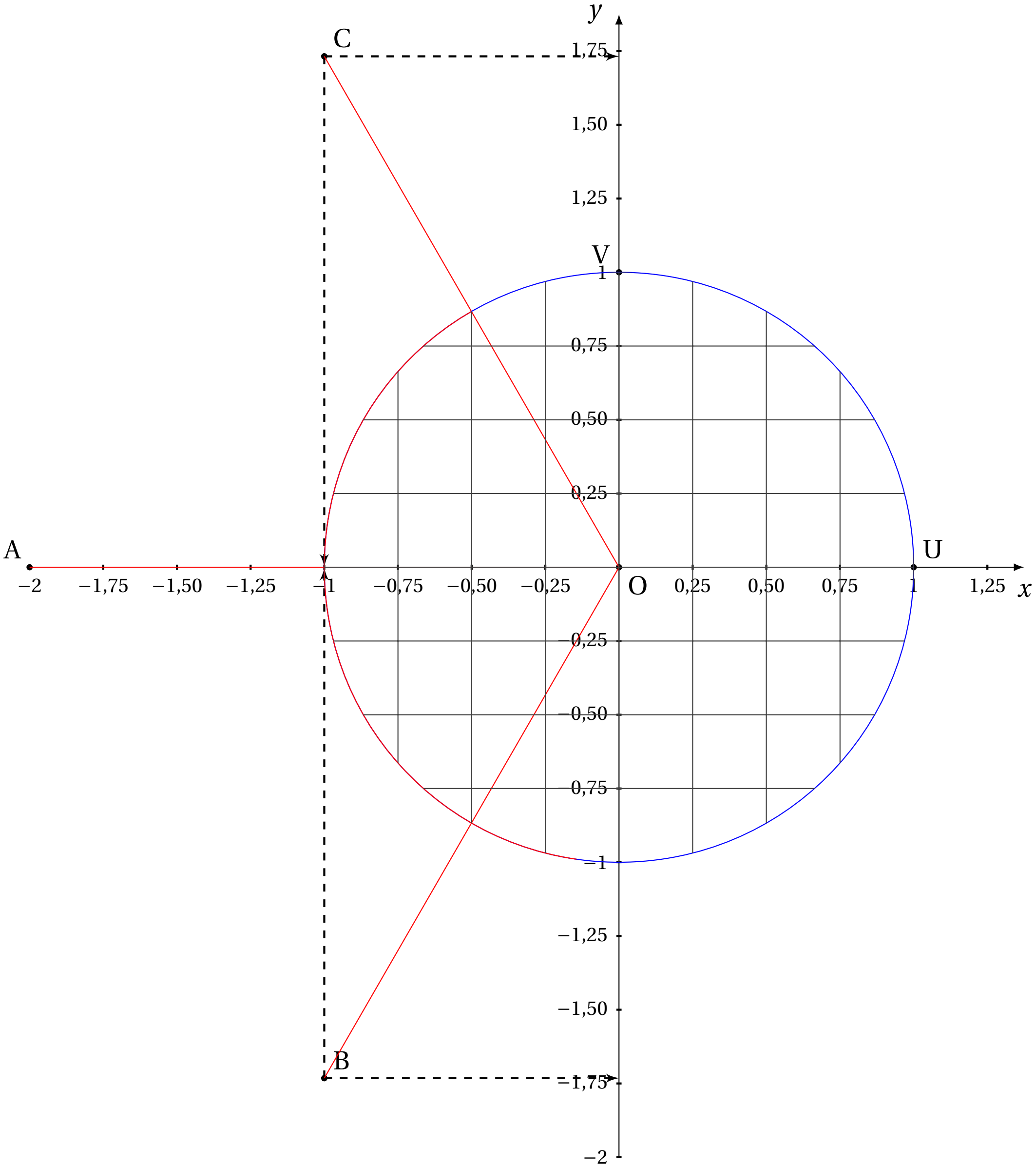
$$S = \sum_{i=0}^{2009} z^i = 1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2009} = \frac{1-z^{2010}}{1-z}$$

Nous avons à calculer z^{2010}...

En remarquant que $2010 = 335 \times 6$, d'après les questions précédentes, $z^{2010} = \left(z^6\right)^{335} = 1$.

Par conséquent, $S = 0$.

Exercice 4 *(6 pts)*



1/ Voir ci-dessus.

2/ Les modules des complexes sont égaux à 2 : $|a|^2 = 4$, $|b|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$ et $|c|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$.

3/ Les points A, B et C sont donc équidistants de l'origine, ils sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2.

4/ Les arguments principaux :

$\arg(a) = \pi$, $\arg(b) = -\dfrac{2\pi}{3}$ et $\arg(c) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Par conséquent, $c = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Exercice 5 *(4 pts)*

1/ Le centre Ω de $\mathscr{C}$ est le milieu (isobarycentre) de [AB] ; soit ω son affixe :

$\omega = \dfrac{1}{2}(a+b) = -\dfrac{1}{2}$

Et le rayon est moitié du diamètre : $\dfrac{1}{2}\text{AB} = \dfrac{1}{2}|b-a|$ et $|b-a|^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 2^2$ donc $\text{R} = \dfrac{5}{2}$

2/ Pour montrer que D est sur le cercle, il nous suffit de vérifier que $\Omega\text{D} = \text{R}$:

$|d - \omega| = |2 - \dfrac{3}{2}i| = \dfrac{5}{2} = \text{R}$

3/ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{DB}$:

$z_{\overrightarrow{DB}} = b - d = -\dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}i$

4/ Le point F d'affixe f est tel que BFAD est un rectangle s'il vérifie $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DB}$.

Soit encore $f - a = -\dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}i$

D'où $f = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i$

Exercice 6 *(5 pts)*

1/ Nous vérifions que par exemple : $(c - f) = k(c - a)$

$c - f = -2 - i$ et $c - a = 8 + 4i$ donc $c - f = -4(c - a)$.

2/ Calculons les mesures des trois côtés :

$\mathrm{BC} = |b - c| = 5$ $\quad$ $\mathrm{CD} = |d - c| = 5$ $\quad$ $\mathrm{DB} = |b - d| = 2\sqrt{5}$

Le triangle BCD est isocèle en C.

3/ Par définition du barycentre G :

$$g = \frac{a - 2b + 3c}{1 - 2 + 3} = 4 + 4i$$

Exercice 7 *(5 pts)*

1/ En fonction de ln(2) seulement :

$$a = \ln(32) = 5\ln(2) \qquad b = \ln(4\,096) = 12\ln(2) \qquad c = \ln\left(\frac{1}{8}\right) = -3\ln(2) \qquad d = \ln(0{,}062\,5) = -4\ln(2)$$

2/ Partant de $\ln(\mathrm{e}) = 1$:

$$a = \ln\left(\mathrm{e}^5\right) = 5 \qquad b = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \qquad c = \ln\left(\mathrm{e}^3\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln(\mathrm{e}^3) + \ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

3/ La valeur exacte de la somme :

$$\mathrm{S} = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) + \cdots + \ln(48) - \ln(49) + \ln(49) - \ln(50) = \ln(1) - \ln(50) = -\ln(50)$$

Exercice bonus *(3 pts)*

1/ $\overline{zz'} = \overline{(x + iy)(x' + iy')} = \overline{(xx' - yy') + i(xy' + yx')} = (xx' - yy') - i(xy' + yx')$

et

$\overline{z}\,\overline{z'} = (x - iy)(x' - iy') = (xx' - yy') - i(xy' + yx')$

les deux membres de l'égalité sont égaux.

2/ Démontrons cette propriété.

- initialisation : en prenant $z' = z$, l'égalité précédente donne $\overline{z^2} = \overline{z}^2$
- transmission :
  nous supposons que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ alors d'après l'égalité précédente $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n}\,\overline{z}$
  en application de notre hypothèse, nous pouvons écrire $\overline{z^n}\,\overline{z} = \overline{z}^n\overline{z}$
  donc finalement : $\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^{n+1}$
- conclusion : pour tout $n \geqslant 2$ on a $\overline{z^n} = \overline{z}^n$