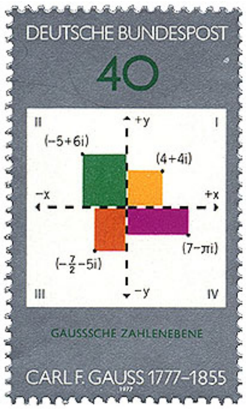
1 Dans les entiers naturels

Dans cette section, tous les entiers sont des entiers naturels.

1.1 Des grands nombres ?

1. Combien y a-t-il d'étoiles dans la Voie Lactée ?
2. Combien y a-t-il de galaxies dans l'univers ?
3. Combien y a-t-il de grains dans un cube de d'un mètre d'arête ?
4. On considère un tas de $2^{64} - 1$ grains de riz.
   (a) Est-ce beaucoup ?
   (b) Sachant que 1 000 grains de riz pèsent 100 grammes, combien pèse le tas riz ?
   (c) La production mondiale annuelle de riz de 1997 est de 500 millions de tonnes. Conclure.
5. En cinq secondes, écrire le plus grand nombre entier possible.



1.2 Définitions

Nous allons désormais présupposer qu'il existe des entiers « trop grands » pour être écrits ou décrits dans un temps « raisonnable ». Écrivons cela sous une forme plus rigoureuse.

AXIOMES

1. Tout entier modéré appartient à $\mathbb{N}$.
2. 1 est un entier modéré.
3. Tout entier inférieur à un entier modéré est un entier modéré.
4. Si deux entiers m et p sont modérés, alors leur somme $m + p$ est modérée.
5. Il existe un entier non modéré.

DÉFINITION
Un entier non modéré est appelé *très grand*

Remarque On abrégera modéré par *md* et très grand par *tg*.

1.3 Propriétés

Démontrer que :

1. tout entier est *md* ou bien *tg* ;
2. 0, 5, 100 et 1000 sont modérés ;
3. si m et p sont modérés, alors mp et m^p sont modérés ;
4. si l'entier n est *tg*, alors $n > 1$ et $n - 1$ est *tg* ;
5. si l'entier n est *tg*, alors $n + 1$ est *tg*
6. un entier m inférieur à tout entier *tg* est *md* ;
7. un entier m supérieur à tout entier *md* est *tg* ;
8. il n'existe pas de plus grand entier *md*, ni de plus petit entier *tg*.

1.4 Exercices

1. Soit n un entier *tg*.
   (a) Quel est l'ordre de grandeur de 1^n ?
   (b) Le nombre d'entiers inférieurs à n est-il fini ?
2. Peut-on avoir un *md* supérieur à un *tg* ?
3. Soit m et p deux entiers *tg* tels que $m > p$.
   Peut-on avoir $m - p$ qui soit *md* ? *tg* ?
4. Soit m et p deux entiers *tg* tels que p divise m.
   Peut-on avoir $\dfrac{m}{p}$ qui soit *md* ? *tg* ?

2 Dans les réels

2.1 La fonction *partie entière*

Tout nombre réel est encadré par deux entiers consécutifs : soit x un réel et n l'unique entier relatif tel que $n \leqslant x < n + 1$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction E par $E(x) = n$.

1. Calculer les images par E de $3,2$; 4 ; π ; $-5,3$ et -6.
2. Montrer que E est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Que représente $x - E(x)$?
4. La fonction définie par $F(x) = x - E(x)$ est-elle croissante ?
5. Tracer les courbes des fonctions E et F.

2.2 Définitions

DÉFINITIONS

Soit x un **réel positif** et $n = E(x)$ sa partie entière.
- Si n est *md* alors x est *md* positif.
- Si n est *tg* alors x est *tg* positif.

Soit x un **réel négatif**.
- Si $-x$ est *md* alors x est *md* négatif.
- Si $-x$ est *tg* alors x est *tg* négatif.

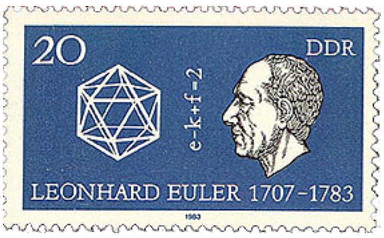
Remarque On ne rajoute pas « positif » ou « négatif » lorsque qu'il n'est pas utile de préciser.

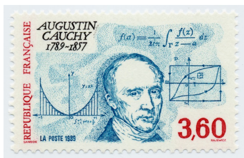
2.3 Propriétés

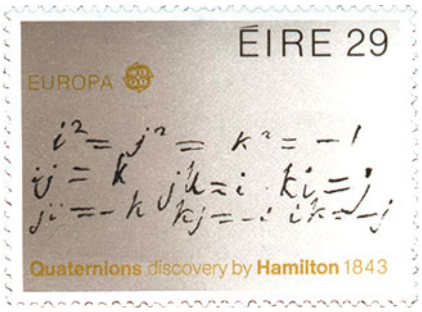
Quelles sont les propriétés vues §1.3 qui sont conservées pour les réels positifs ?

2.4 Exercices

1. Soit ω un réel *tg*. Quel est l'ordre de grandeur de :
   (a) $a + b$ si $a = b = \omega$;
   (b) $a + b$ si $a = \omega$ et $b = -\omega$;
   (c) $a + b$ si $a = \omega$ et $b = 3 - \omega$;
   (d) ab si $a = \omega^2$ et $b = \omega^{-1}$;
   (e) ab si $a = \omega$ et $b = \omega^{-1}$;
   (f) ab si $a = \omega^2$ et $b = \omega^{-3}$;
2. Soit ω un réel *tg* positif. On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{\omega}$.
   (a) Montrer que $\varepsilon > 0$.
   (b) Montrer que $\varepsilon \neq 1$.
   (c) Montrer que $\varepsilon \leqslant 10^{-1}$.
   (d) Montrer que $\varepsilon \leqslant 10^{-10}$.
   (e) Soit n un entier modéré.
   Quelle est la $n^{\text{ième}}$ décimale de ε ?
   (f) Comment exprimer ε ?







3 Les réels très petits

3.1 Définitions

DÉFINITIONS

- Soit ε un réel non nul. Si $\dfrac{1}{\varepsilon}$ est *tg* alors ε est **très petit**.
- 0 est **très petit**.

Remarque On abrégera très petit par *tp*.

3.2 Propriétés

Parmi les réels positifs, existe-t-il :

1. un plus petit réel *tp* ?
2. un plus petit réel *tp* non nul ?
3. un plus grand réel *tp* ?
4. un plus petit réel *md n tp* ?

3.3 Exercices

Soit ε un réel *tp* non nul. Quel est l'ordre de grandeur de :

1. $a+b$ si $a=b=\varepsilon$;
2. $a+b$ si $a=\varepsilon$ et $b=-\varepsilon$;
3. $a+b$ si $a=\varepsilon$ et $b=3-\varepsilon$;
4. ab si $a=\varepsilon^2$ et $b=\varepsilon^{-1}$;
5. ab si $a=\varepsilon$ et $b=\varepsilon^{-1}$;
6. ab si $a=\varepsilon^2$ et $b=\varepsilon^{-3}$;

4 Répartition des réels

Représenter la « nouvelle » droite des réels en y figurant les *très grands* ou *très petits* nombres.

5 Opérations avec les ordres de grandeur

5.1 Règles

Compléter les tableaux *(tab. 1, p. 3)* quand cela est possible.

+	*tp*	*md n tp*	*tg*
tp			
md n tp			
tg			

×	*tp*	*md n tp*	*tg*
tp			
md n tp			
tg			

TABLE 1 – OPÉRATIONS AVEC LES ORDRES DE GRANDEUR

5.2 Exercices

1. ε est un nombre réel *tp* non nul et ω un réel *tg*.
   Déterminer les ordres de grandeur des expressions numériques suivantes :
   (a) $\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$
   (b) $\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}$
   (c) $2\omega^2 - 10\omega+5$
   (d) $\dfrac{1}{\omega^2}$
   (e) $\dfrac{10\omega^2+1}{\omega-2}$
   (f) $\dfrac{\omega-1}{\omega^2-1}$
   (g) $\dfrac{\omega}{\varepsilon-2}$
   (h) $\dfrac{\varepsilon^2}{\omega+1}$
   (i) $\dfrac{2\varepsilon+1}{\omega+3}$
   (j) $\dfrac{100\omega^2+1}{5\varepsilon-2}$
2. (a) Déterminer l'ordre de grandeur de $\sqrt{x}$ en fonction de celui de x.
   (b) En déduire l'ordre de grandeur de $\dfrac{1+\omega+\omega^2}{\sqrt{\omega}+\omega+\omega^2}$ lorsque ω est tg^+.
3. (a) Pour ω tg^+ et ε *tp*, écrire les expressions suivantes comme la somme d'un entier et d'un réel *tp*.
   i. $\dfrac{\omega+1}{\omega}$
   ii. $\dfrac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2+1}$
   iii. $(1+\varepsilon)^3$
   (b) Ces expressions sont-elles égales ?
   (c) Que peut-on en dire d'autre ?

6 Réels très proches

6.1 Définitions

DÉFINITIONS

Soit x et y deux réels.
– On dit que x et y sont **très proches** et on note $x \approx y$ si $x - y$ est *tp*.

REMARQUE
Dire que x est *tp* revient à dire que x est *très proche de zéro* : $x \approx 0$

6.2 Propriétés

Montrer que :

1. si $x \approx y$, alors x et y ont le même ordre de grandeur ;
2. si $x \approx y$ et $y \approx z$, alors $x \approx z$;
3. si $x \approx x'$ et $y \approx y'$, alors $x + y \approx x' + y'$;
4. si $x \approx x'$ et $y \approx y'$ avec x et y *md*, alors $xy \approx x'y'$;
5. si $x \approx x'$ avec x *md n tp*, alors $x^{-1} \approx x'^{-1}$;
6. si $x \approx x'$ et $y \approx y'$ avec x *md* et y *n tp*, alors $xy^{-1} \approx x'y'^{-1}$;
7. si $x \approx 2$, alors $\sqrt{x} \approx \sqrt{2}$;
8. si $x \approx x'$, alors $\sqrt{x} \approx \sqrt{x'}$;

6.3 Exercices

1. Montrer que $\dfrac{\sqrt{\varepsilon+1}-1}{\varepsilon} \approx \dfrac{1}{2}$ avec $\varepsilon \approx 0$ et $\varepsilon \neq 0$. (multiplier par l'identité conjuguée si nécessaire !)
2. (a) Déterminer plusieurs expressions de $A = \dfrac{2\varepsilon+1}{\varepsilon+3}$.
   En particulier, déterminer x et y tel que $A = \dfrac{1}{\varepsilon+3} + x$, et $A = \dfrac{1}{3} + y$.
   (b) Quels sont les réels très proches en jeu parmi les termes apparus dans les différentes expressions de A ?

7 Réels explicites

De même que pour les entiers *tg*, on vient de voir qu'il est impossible d'écrire ou de décrire certains réels. Avec des outils appropriés, on peut définir rigoureusement de la notion de réels explicite. On se contentera d'une définition empirique.

7.1 Définitions

DÉFINITIONS

– Les entiers modérés sont explicites.
– Un réel est **explicite** si on peut l'écrire ou le décrire à l'aide d'un nombre modéré d'opérations algébriques sur des réels explicites.

Remarque On abrégera explicite par *expl*.

7.2 Exercice

1. Déterminer les ordres de grandeur des expressions suivantes.
   Dans le cas où l'expression est modérée, l'écrire comme la somme d'un réel explicite et d'un très petit.
   (a) $\dfrac{2\varepsilon+1}{\varepsilon+3}$ avec $\varepsilon \approx 0$ et $\varepsilon \neq 0$.
   (b) $\dfrac{\omega^3}{\omega^3+1}$ avec ω *tg*.
   (c) $\dfrac{2\omega+1}{\omega+3}$ avec ω *tg*.
   (d) $\dfrac{a-1}{2-\sqrt{a+3}}$ avec $a \approx 1$ et $a \neq 1$.

7.3 Propriétés

1. Montrer que tout réel non nul *expl* est *md n tp*.
2. Montrer que si x et y sont *expl*, alors $x+y$, xy, $-x$, x^{-1} $(x \neq 0)$ et $E(x)$ sont *expl*.
3. Soit ε *tp* non nul et ω *tg*. Compléter le tableau ci-contre avec un exemple pour chaque case si possible.

	md		*tg*
	tp	*md n tp*	
expl			
n expl			

8 Ombre d'un réel

8.1 Définitions

THÉORÈME – ADMIS *Ombre d'un réel*

Soit x réel modéré.
- Il existe un unique réel explicite, appelé **ombre** et noté $°x$, très proche de x.

THÉORÈMES

- Un réel est explicite si, et seulement si, il est égal à son ombre.
- Deux réels explicites très proches sont égaux.
- L'ombre de tout réel très petit est 0.

8.2 Propriétés

Soit x et y deux réels *md* et n un entier *expl*. Montrer que :

1. $°(x+y) = °x + °y$
2. $°(xy) = °x \cdot °y$
3. $°(-x) = -°x$
4. $°(x^n) = (°x)^n$
5. $x > 0 \Rightarrow °x \geqslant 0$
6. $x < y = °x \leqslant °y$

8.3 Exercice

1. Prouver que $\sqrt{2}$ est *expl*.
2. Déterminer l'ordre de grandeur des expressions suivantes. Si le résultat est modéré préciser son ombre.
   (a) $\dfrac{3a+1}{a-2}$ avec $a \approx 2$ et $a \neq 2$.
   (b) $\dfrac{a-3}{(a+\frac{1}{2})^2 - \frac{49}{4}}$ avec $a \approx 3$ et $a \neq 3$.
   (c) $\dfrac{a^2-8a+5}{a^2+a-2}$ avec $a \approx -1$ et $a \neq -1$.


GODEFROI GUILLAUME LEIBNITZ


ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ
ΕΛΛΑΣ-ΔΡΧ.3.50


60
EUROPA
DEUTSCHE BUNDESPOST
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ · 1646–1716


ПОЧТА СССР
1983
1200 ЛЕТ
Мухаммед аль-Хорезми


18p
PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
Sir ISAAC NEWTON (1642-1727)


MALDIVES
EUCLID
Rf3


中國人民郵政
8分