À propos de la méthode d'Euler

Jean-Baptiste Frondas & Jean-Pierre Gerbal

Pour des élèves de première

L'objectif : construction d'une courbe intégrale

- Cette année, en première, nous avons appris à dériver certaines fonctions.
- L'année prochaine, en terminale, nous apprendrons à intégrer, *i.e.*, quand on connaît une fonction f, à déterminer une fonction g telle que $g' = f$.
- Mais, dès cette année, nous pourrons trouver non pas une formule explicite pour g (une telle formule s'appelle une *primitive*), mais une construction par approximations successives de la courbe qui représente cette fonction g : c'est l'objectif de la *méthode d'Euler de construction d'une courbe intégrale.*

L'objectif : construction d'une courbe intégrale

- Cette année, en première, nous avons appris à dériver certaines fonctions.
- L'année prochaine, en terminale, nous apprendrons à intégrer, *i.e.*, quand on connaît une fonction f, à déterminer une fonction g telle que $g' = f$.
- Mais, dès cette année, nous pourrons trouver non pas une formule explicite pour g (une telle formule s'appelle une *primitive*), mais une construction par approximations successives de la courbe qui représente cette fonction g : c'est l'objectif de la *méthode d'Euler de construction d'une courbe intégrale*.

L'objectif : construction d'une courbe intégrale

- Cette année, en première, nous avons appris à dériver certaines fonctions.
- L'année prochaine, en terminale, nous apprendrons à intégrer, *i.e.*, quand on connaît une fonction f, à déterminer une fonction g telle que $g' = f$.
- Mais, dès cette année, nous pourrons trouver non pas une formule explicite pour g (une telle formule s'appelle une *primitive*), mais une construction par approximations successives de la courbe qui représente cette fonction g : c'est l'objectif de la *méthode d'Euler de construction d'une courbe intégrale*.

Sommaire

Le cours

l'approximation affine la plus simple

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a un nombre réel de I, alors pour tout réel h non nul et proche de 0, on peut écrire l'approximation affine la plus simple :

$$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$$

Application

- Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I, et x_i un réel de I, pour tout réel h, non nul et proche de 0 tel que $x_i + h \in \mathrm{I}$, on a l'approximation affine simple :

$$g(x_i + h) \approx g(x_i) + h\,g'(x_i)$$

- Pour effectuer les calculs, on choisira une valeur initiale $g(x_0)$. La raison en est que, *à une constante additive près*, plusieurs fonctions g peuvent convenir : toutes les fonctions $g+k$, où k est un nombre, ont une même dérivée f.

Le cours

l'approximation affine la plus simple

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a un nombre réel de I, alors pour tout réel h non nul et proche de 0, on peut écrire l'approximation affine la plus simple :

$$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$$

Application

- Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I, et x_i un réel de I, pour tout réel h, non nul et proche de 0 tel que $x_i + h \in \mathrm{I}$, on a l'approximation affine simple :

$$g(x_i + h) \approx g(x_i) + h\,g'(x_i)$$

- Pour effectuer les calculs, on choisira une valeur initiale $g(x_0)$. La raison en est que, *à une constante additive près*, plusieurs fonctions g peuvent convenir : toutes les fonctions $g+k$, où k est un nombre, ont une même dérivée f.

Le cours

l'approximation affine la plus simple

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a un nombre réel de I, alors pour tout réel h non nul et proche de 0, on peut écrire l'approximation affine la plus simple :

$$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$$

Application

- Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I, et x_i un réel de I, pour tout réel h, non nul et proche de 0 tel que $x_i + h \in \mathrm{I}$, on a l'approximation affine simple :

$$g(x_i + h) \approx g(x_i) + h\,g'(x_i)$$

- Pour effectuer les calculs, on choisira une valeur initiale $g(x_0)$. La raison en est que, *à une constante additive près*, plusieurs fonctions g peuvent convenir : toutes les fonctions $g + k$, où k est un nombre, ont une même dérivée f.

Sommaire

Principes de calcul

Après avoir choisi une valeur pour h, on peut construire le tableau suivant :

étapes	x_0	$f(x_0)$	$g(x_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$f(x_1)$	$g(x_1) = hf(x_0) + g(x_0)$
2	$x_2 = x_1 + h$	$f(x_2)$	$g(x_2) = hf(x_1) + g(x_1)$
etc	...	...	...

Principes de calcul

Après avoir choisi une valeur pour h, on peut construire le tableau suivant :

étapes	x_0	$f(x_0)$	$g(x_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$f(x_1)$	$g(x_1) = hf(x_0) + g(x_0)$
2	$x_2 = x_1 + h$	$f(x_2)$	$g(x_2) = hf(x_1) + g(x_1)$
etc	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Principes de calcul

Après avoir choisi une valeur pour h, on peut construire le tableau suivant :

étapes	x_0	$f(x_0)$	$g(x_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$f(x_1)$	$g(x_1) = hf(x_0) + g(x_0)$
2	$x_2 = x_1 + h$	$f(x_2)$	$g(x_2) = hf(x_1) + g(x_1)$
etc	...	...	...

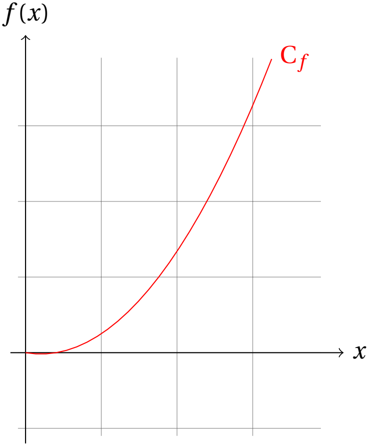
Principes de calcul

Après avoir choisi une valeur pour h, on peut construire le tableau suivant :

étapes	x_0	$f(x_0)$	$g(x_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$f(x_1)$	$g(x_1) = hf(x_0) + g(x_0)$
2	$x_2 = x_1 + h$	$f(x_2)$	$g(x_2) = hf(x_1) + g(x_1)$
etc	$\dots$	$\dots$	$\dots$

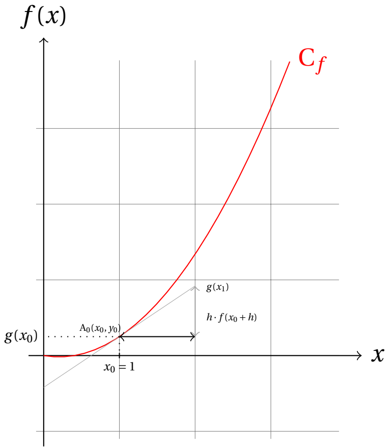
Sommaire

Représentation graphique



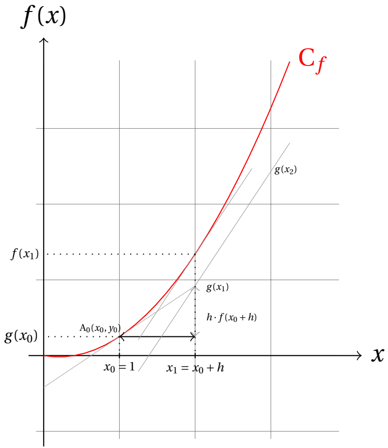
- On se donne une fonction dans un repère. $g(x_0) = 0,25$ est donné par l'énoncé.
- On trace la tangente au point de C_f qui a pour abscisse x_0. On la fait passer par le point de coordonnées $(x_0, g(x_0))$. On détermine ainsi $g(x_1)$.
- On trace la tangente au point de C_f qui a pour abscisse x_1. On la retrace en la faisant passer par le point dont les coordonnées sont $(x_1, g(x_1))$. On détermine ainsi $g(x_2)$.

Représentation graphique



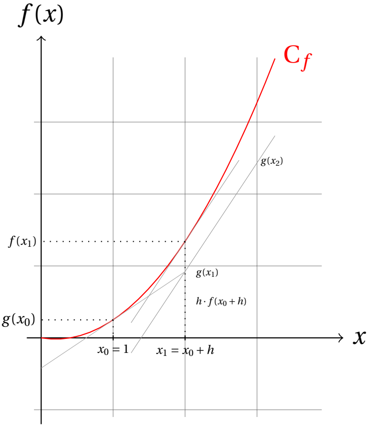
- On se donne une fonction dans un repère. $g(x_0) = 0,25$ est donné par l'énoncé.
- On trace la tangente au point de C_f qui a pour abscisse x_0. On la fait passer par le point de coordonnées $(x_0, g(x_0))$. On détermine ainsi $g(x_1)$.
- On trace la tangente au point de C_f qui a pour abscisse x_1. On la retrace en la faisant passer par le point dont les coordonnées sont $(x_1, g(x_1))$. On détermine ainsi $g(x_2)$.

Représentation graphique



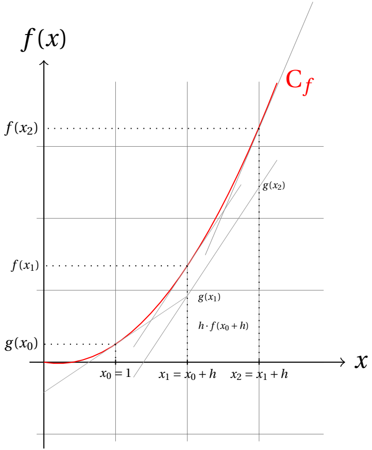
- On se donne une fonction dans un repère. $g(x_0) = 0,25$ est donné par l'énoncé.
- On trace la tangente au point de C_f qui a pour abscisse x_0. On la fait passer par le point de coordonnées $(x_0, g(x_0))$. On détermine ainsi $g(x_1)$.
- On trace la tangente au point de C_f qui a pour abscisse x_1. On la retrace en la faisant passer par le point dont les coordonnées sont $(x_1, g(x_1))$. On détermine ainsi $g(x_2)$.

Représentation graphique



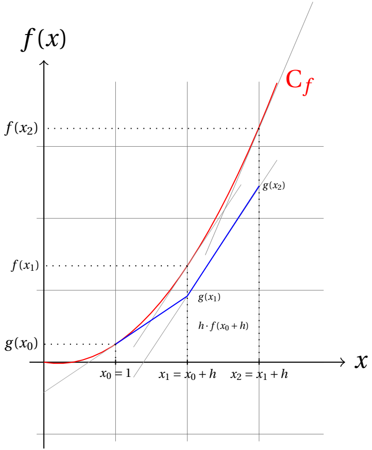
- On peut tracer une troisième tangente et recommencer le processus.
- On a surtout obtenu un bout de courbe de la fonction g.
- La courbe de la fonction g théorique pour comparer.

Représentation graphique



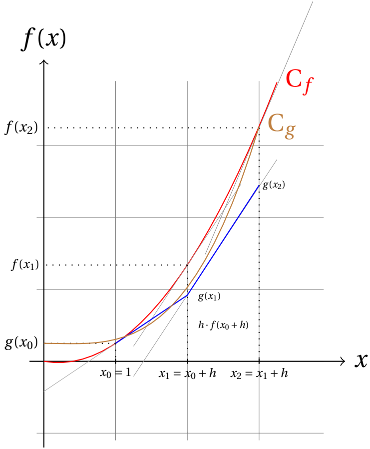
- On peut tracer une troisième tangente et recommencer le processus.
- On a surtout obtenu un bout de courbe de la fonction g.
- La courbe de la fonction g théorique pour comparer.

Représentation graphique



- On peut tracer une troisième tangente et recommencer le processus.
- On a surtout obtenu un bout de courbe de la fonction g.
- La courbe de la fonction g théorique pour comparer.

Représentation graphique



- On peut tracer une troisième tangente et recommencer le processus.
- On a surtout obtenu un bout de courbe de la fonction g.
- La courbe de la fonction g théorique pour comparer.

Sommaire

1^{er}exemple

On se propose de mettre en pratique ce que nous venons de voir.

Soit $f(x) = x^2$. On cherche la courbe de g, telle que $g'(x) = f(x)$ et $g(0) = 0$.

Compléter à la main les tableaux suivants pour lesquels on prend des valeurs de h décroissantes : 1 - 0,5 - 0,25

1^{er} exemple

On se propose de mettre en pratique ce que nous venons de voir.

Soit $f(x) = x^2$. On cherche la courbe de g, telle que $g'(x) = f(x)$ et $g(0) = 0$.

Compléter à la main les tableaux suivants pour lesquels on prend des valeurs de h décroissantes : 1 - 0,5 - 0,25

1^{er}exemple

On se propose de mettre en pratique ce que nous venons de voir.

Soit $f(x) = x^2$. On cherche la courbe de g, telle que $g'(x) = f(x)$ et $g(0) = 0$.

Compléter à la main les tableaux suivants pour lesquels on prend des valeurs de h décroissantes : 1 - 0,5 - 0,25

$f(x) = x^2$ et $g(0) = 0$ et $h = 1$

x	$f(x)$	$g(x)$
0	$f(0)$	$g(0)$
1	$f(1)$	$g(1)$
2		
3		

$f(x) = x^2$ et $g(0) = 0$ et $h = 0,5$

x	$f(x)$	$g(x)$
0	$f(0)$	$g(0)$
$0,5$	$f(0,5)$	$g(0,5)$
1		
$1,5$		
2		
$2,5$		
3		

$f(x) = x^2$ et $g(0) = 0$ et $h = 0,25$

x	$f(x)$	$g(x)$
0	$f(0)$	$g(0)$
$0,25$	$f(0,25)$	$g(0,25)$
$0,5$		
$0,75$		
$\dots$		
3		

Solution : $f(x) = x^2$ et $g(0) = 0$ et $h = 1$

0	0	0
1	1	0
2	4	1
3	9	5

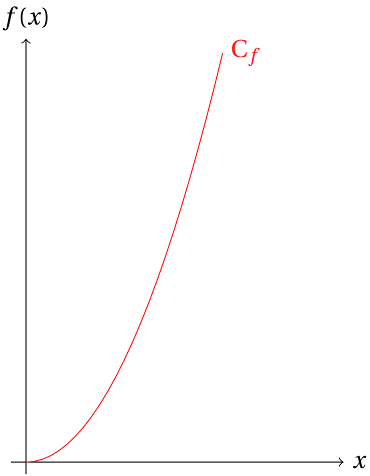
Solution : $f(x) = x^2$ et $g(0) = 0$ et $h = 0,5$

0	0	0
$0,5$	$0,25$	0
1	1	$0,13$
$1,5$	$2,25$	$0,63$
2	4	$1,75$
$2,5$	$6,25$	$3,75$
3	9	$6,88$

Solution : $f(x) = x^2$ et $g(0) = 0$ et $h = 0,25$

0	0	0
$0,25$	$0,06$	0
$0,5$	$0,25$	$0,02$
$0,75$	$0,56$	$0,08$
1	1	$0,22$
$1,25$	$1,56$	$0,47$
$1,5$	$2,25$	$0,86$
$1,75$	$3,06$	$1,42$
2	4	$2,19$
$2,25$	$5,06$	$3,19$
$2,5$	$6,25$	$4,45$
$2,75$	$7,56$	$6,02$
3	9	$7,91$

Représentations

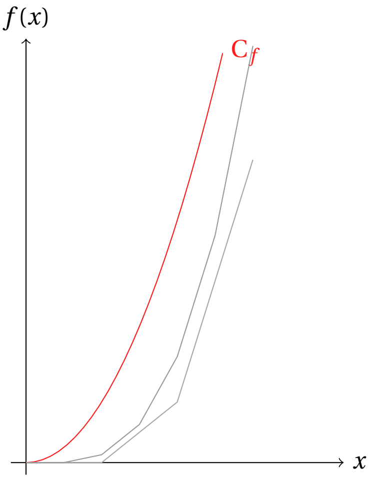


- La courbe représentant f
- Construction de g avec $h = 1$
- Construction de g avec $h = 0,5$
- Construction de g avec $h = 0,25$
- La courbe théorique !

Représentations

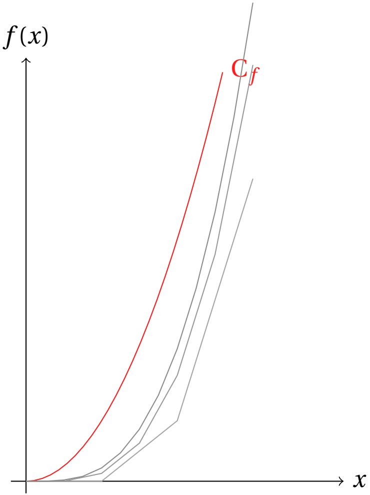
- La courbe représentant f
- Construction de g avec $h = 1$
- Construction de g avec $h = 0,5$
- Construction de g avec $h = 0,25$
- La courbe théorique !

Représentations



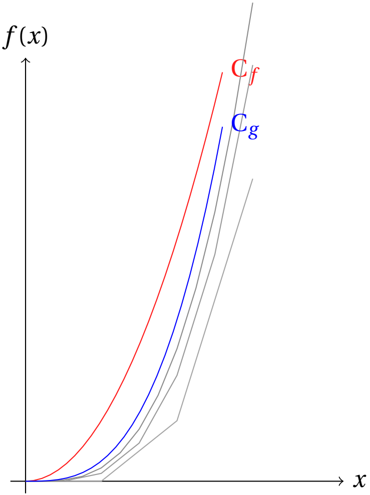
- La courbe représentant f
- Construction de g avec $h = 1$
- Construction de g avec $h = 0,5$
- Construction de g avec $h = 0,25$
- La courbe théorique !

Représentations



- La courbe représentant f
- Construction de g avec $h = 1$
- Construction de g avec $h = 0,5$
- Construction de g avec $h = 0,25$
- La courbe théorique !

Représentations



- La courbe représentant f
- Construction de g avec $h = 1$
- Construction de g avec $h = 0,5$
- Construction de g avec $h = 0,25$
- La courbe théorique !

Euler *chez Wikipedia*

Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, était un mathématicien et un physicien suisse.

Il est considéré comme le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Il domine les mathématiques du XVIII^{e}siècle.
Complètement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de son travail durant cette période.
Il montra aussi que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

... c'est la formule d'Euler, elle établit le rôle central de la fonction exponentielle dans les mathématiques.

L'identité d'Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$, que certains scientifiques ont appelé la « formule la plus remarquable du monde », en est une conséquence immédiate.