Exercice : bases du calcul intégral (*8 points*)

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$.

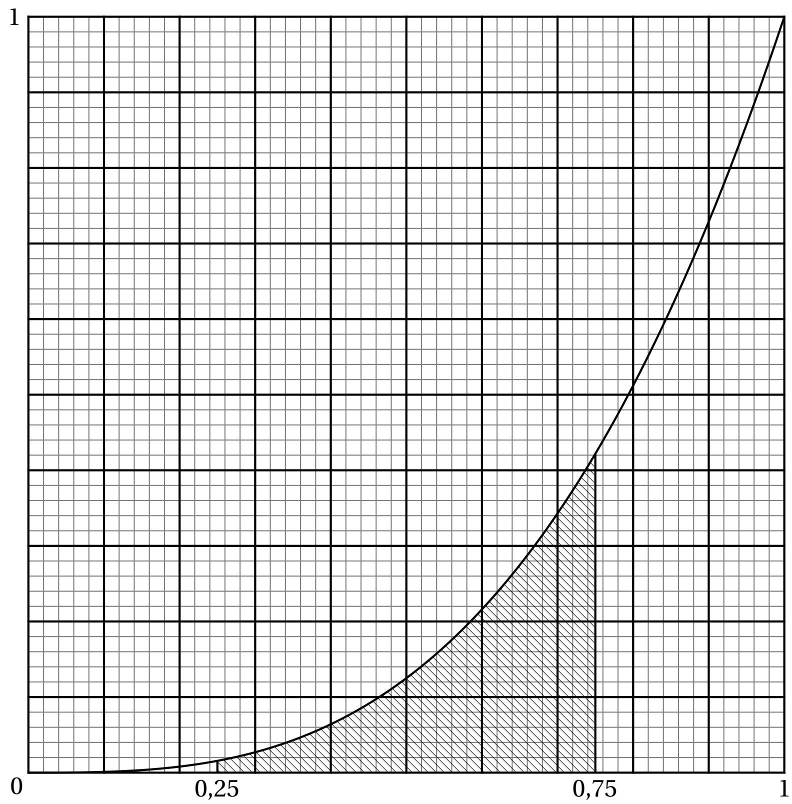
   Par définition du cours, $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(0)$ où F est une fonction primitive de f. Nous cherchons donc des primitives de chaque monôme.

   Pour $5x^2$, la connaissance du tableau des dérivées nous permet d'écrire : $\begin{array}{c|c} x^3 & 3x^2 \\ \hline k\,x^3 & 5x^2 \end{array}$ qui donne $\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline k & 5 \end{array}$ donc $k = \dfrac{5}{3}$ et la primitive cherchée vaut $\dfrac{5}{3}x^3$.

   Pour $-3x$, $\begin{array}{c|c} x^2 & 2x \\ \hline k\,x^2 & -3x \end{array}$ qui donne $\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline k & -3 \end{array}$ donc $k = -\dfrac{3}{2}$ et la primitive cherchée vaut $-\dfrac{3}{2}x^2$.

   Au final : $F(x) = \dfrac{5}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + x$ et $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{625}{3} - \frac{75}{2} + 5\right) - 0 = \frac{1055}{6}$.

2. L'aire hachurée :



   Pour estimer l'aire... nous pouvons compter le nombre de carreaux hachurés (chaque carreau valant 0,01 u.a. et contenant 25 petits carrés). Par cette méthode géométrique basique, nous lisons une aire d'environ 0,08 u.a. (soit 8 cm^2).

3. Soit G la fonction définie sur $[0\,;+\infty]$ par $G(x) = \dfrac{10x^2}{x+2}$ et f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = x - 5 + \dfrac{10x(x+4)}{(x+2)^2}$. Nous constatons que $f(x) = x - 5 + G'(x)$ donc que $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + G(x)$ est une primitive de f.

QCM : lectures graphiques, fonction économique et calcul intégral (*4 points*)

1. La figure 1 donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et la figure 2 celle d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

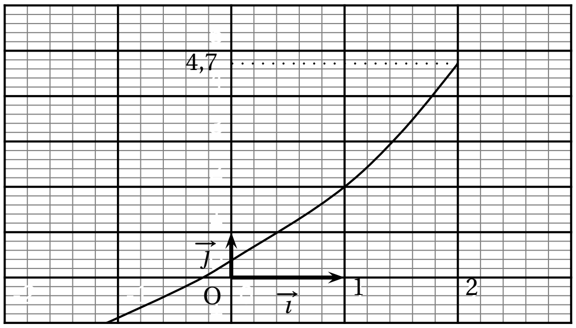


Figure 1

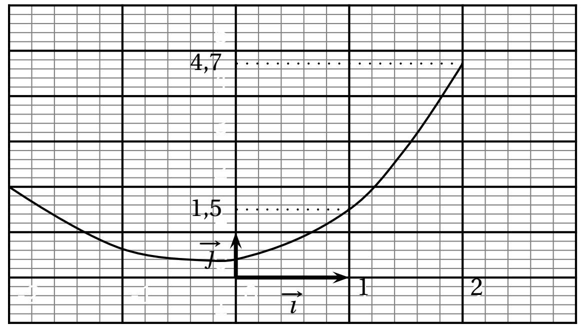
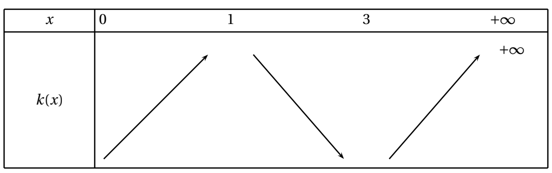
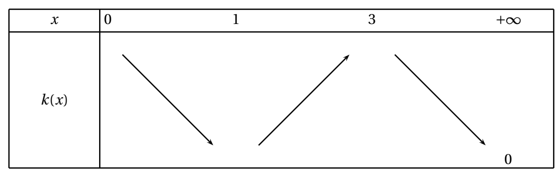


Figure 2

Les valeurs de la primitive donnée se lisent sur le graphique 2 : de 1 à 2, l'accroissement vaut 3,2, c'est la valeur cherchée donc réponse B.

2. La fonction k définie et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ est connue par son tableau de variations. Parmi les trois propositions qui suivent, le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \dfrac{1}{k(x)}$ est celui de la proposition A. En effet, la fonction inverse *inverse l'ordre* donc les sens de variations. De plus, si $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.





3. En économie, le coût marginal est le coût engendré par la production d'une unité supplémentaire. On considère que le coût marginal est en règle générale, tout comme dans le cas présent, assimilable à la dérivée du coût total. Dans une entreprise, une étude a montré que le coût marginal $C_m(q)$ exprimé en millliers d'euro en fonction du nombre q d'articles fabriqués est donné par la relation :

$$C_m(q) = 3q^2 - 10q + \frac{2}{q^2} + 20.$$

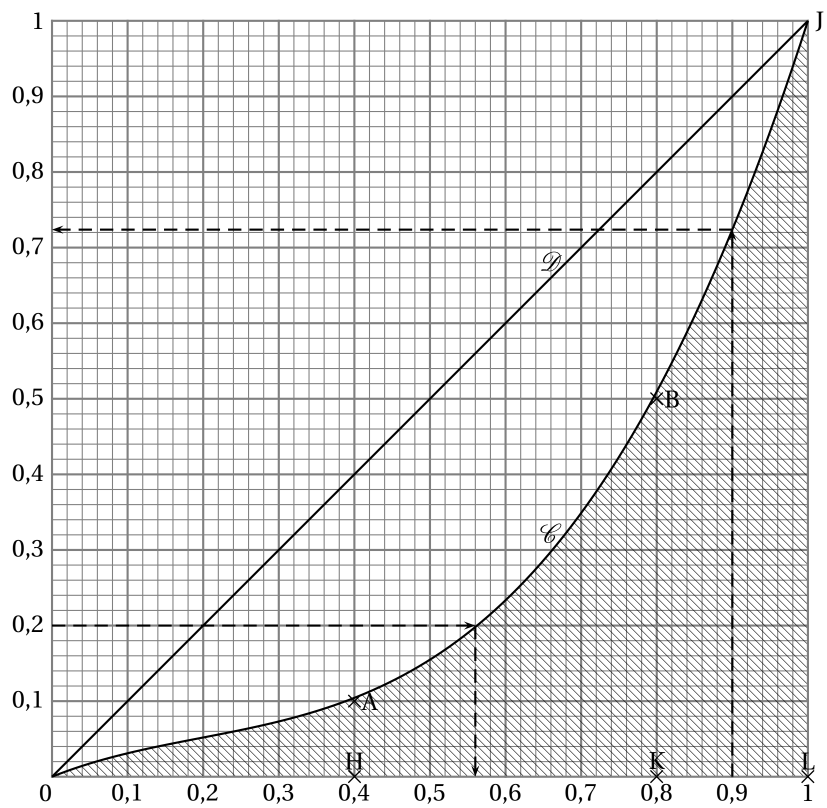
Le coût total C_T exprimé en milliers d'euros sachant qu'il vaut 10 000 euros pour $q = 1$ est donné par la proposition B car il faut que $C_T(1) = 10$ milliers d'euros.

Exercice : lecture graphique, fonction économique et calcul intégral (8 *points*)

La répartition des salaires dans une entreprise a été modélisée par la fonction $f(x)$ définie sur $[0\,;1]$ suivante :

$$f(x)=\frac{27}{20}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5(x+1)^2}+\frac{1}{5}$$

et représentée graphiquement par :



1. La part de la masse salariale attribuée aux 10% des salaires les plus élevés vaut : $100-72=28\%$.
2. Le pourcentage des salaires les plus bas se partageant 20% de la masse salariale est de 56%.
3. Le domaine Δ est hachuré.
4. L'aire de OAH vaut $0,5\times0,4\times0,1=0,02$; celle de HABK vaut $0,5\times(0,5+0,1)\times0,4=0,12$ et celle de KBJL vaut $0,5\times(0,5+1)\times0,2=0,15$. Soit un total de $0,29$ u.a.
5. La fonction G est une primitive de la fonction g car $G'(x)=g(x)$.
6. $f(x)=\frac{27}{20}x^3-\frac{1}{2}x^2-G'(x)+\frac{1}{5}$ donc (en appliquant la même méthode que dans le premier exercice) :
$$F(x)=\frac{27}{80}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{5}\,\frac{1}{x+1}+\frac{1}{5}x$$
7. L'aire du domaine Δ vaut exactement $F(1)-F(0)=\frac{13}{48}$ u.a.
8. L'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$ vaut $0,5-\frac{13}{48}=\frac{11}{48}$ u.a.
9. $\mathscr{G}=2\int_0^1\left(x-f(x)\right)\mathrm{d}x$ donc deux fois l'aire $\mathscr{A}$ calculée, soit $\frac{22}{48}\approx0,46$.