Exercice 1

7 points

Une association organise une loterie et demande à tout participant une mise m exprimée en euros. La règle du jeu est la suivante.

Un joueur doit tirer simultanément deux boules, au hasard, dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes :

- si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
- si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa mise m.
- si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu en faisant tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :
  - sur un huitième $\left(\frac{1}{8}\right)$ de la roue le gain est de 100 euros,
  - sur un quart $\left(\frac{1}{4}\right)$ de la roue le gain est de 20 euros,
  - sur le reste de la roue, le joueur est remboursé de sa mise m.

- On appelle V l'événement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».
- On appelle J l'événement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».
- On appelle R l'événement « le joueur est remboursé de sa mise ».

1/ Il est recommandé de modéliser l'expérience par un arbre.

a/ Calculer les probabilités $P(V)$ et $P(J)$ des événements respectifs V et J.

b/ Un joueur a tiré deux boules vertes. Justifier que la probabilité pour le joueur d'être remboursé vaut $0,625$ puis en déduire $P(R \cap V)$.

c/ Calculer $P(R)$.

d/ Justifier que la probabilité de gagner les 100 euros vaut $0,0125$ puis calculer la probabilité de gagner 20 euros.

2/ On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est à dire en tenant compte de sa mise de m euros.

a/ On fixe la mise à 5 euros.

i. Détailler les valeurs prises par la variable aléatoire X.

ii. Vérifier que $P(X = -5)$ vaut $0,6$ et établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

iii. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que signifie ce résultat ?

b/ **Dans cette question bonus**, on fixe la mise à m euros.

i. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

ii. Démontrer que l'espérance est donnée par : $E(X) = 1,75 - 0,6375m$

iii. L'association espère gagner de l'argent avec sa loterie. Quelle valeur minimale doit-elle donner à m ?

Exercice 2

4 points

Partie A

⋆ Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1/ Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

2/ Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3/ **a/** Justifier que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

b/ Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

c/ L'autre solution est appelée α. Avec la calculatrice, calculer l'arrondi au centième de α en le justifiant.

4/ Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Exercice 2

5 points

Partie B

⋆ Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^{x}$$

1/ Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$ (*on pourra mettre* e^{2x} *en facteur*).

2/ Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ (vu dans la partie A) ont le même signe puis en déduire le sens de variation de f.

3/ Montrer que :

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$$

où α est défini dans la partie **A**.

4/ Établir le tableau de variations de f.

5/ Tracer soigneusement la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Exercice 3

4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1/ Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -11 + 4\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{B}} = -3 - 4\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_{\mathrm{C}} = 5 + 4\mathrm{i}.$$

2/ Calculer le module et l'argument principal du quotient $\dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

3/ Soit E l'image du point C par la rotation $\mathscr{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Montrer que l'affixe de E vérifie $z_{\mathrm{E}} = -3 + \left(8\sqrt{2} - 4\right)\mathrm{i}$ et placer le point E sur le graphique.

4/ Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathscr{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et placer le point D sur le graphique.

5/ **Dans cette question bonus, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

Soit $\mathscr{D}$ la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].

Montrer que B, I et J sont alignés.