Lycée J. ZAY

Terminales

SÉRIE S - NON spécialité MATH

bac blanc

SESSION 2010

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 2 à 6

Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur. Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro. Enfin, il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation de la copie.

Les **calculatrices** sont **AUTORISÉES** pour cette épreuve.

Le devoir comporte **4** exercices indépendants.

Exercice 1 *5 points*

Partie A. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*
On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \text{e}^x$ *est l'unique fonction* φ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $\varphi' = \varphi$ *et* $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{ax}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. On considère alors la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,\text{e}^{-ax}$.
   Montrer que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

Partie B. On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad y' = 2y + \cos x$$

et la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

1. Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle
$$(\text{E}_0) : \quad y' = 2y.$$
3. Démontrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $(v - u)$ est solution de l'équation (E_0).
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 *5 points*

On considère la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty ; 6[$ par :

$$f(x) = \frac{9}{6 - x}.$$

1. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty ; 6[$.
   b. Justifier que si $x < 3$ alors $f(x) < 3$.
2. On définit la suite (U_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$\left\{\begin{array}{l} \text{U}_0 = -3 \\ \text{U}_{n+1} = f(\text{U}_n) \end{array}\right.$$
   a. Calculer la valeur exacte de chacun des termes U_1, U_2 et U_3.
   b. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
   c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\text{U}_n < 3$.
   d. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).
3. On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\text{V}_n = \frac{1}{\text{U}_n - 3}.$$
   a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
   b. Exprimer V_n en fonction de n puis en déduire U_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 3 *4 points*

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Dans le tableau fourni en annexe, le candidat doit entourer la bonne réponse pour chaque question. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est compté 0 point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à zéro.

Partie A. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + \text{i}$ est :

a : 3 | b : i | c : $3 + \text{i}$

2. Pour tout nombre complexe z, $|z + \text{i}|$ est égal à :

a : $|z| + 1$ | b : $|z - 1|$ | c : $|i\overline{z} + 1|$

3. Soient A et B les deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - \text{i}| = |z + 1|$ est :

a : la droite (AB) | b : la perpendiculaire à (AB) passant par O | c : le cercle de diamètre [AB]

4. La forme trigonométrique du nombre complexe $-\sqrt{3} + \text{i}$ est :

a : $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ | b : $-2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right)$ | c : $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Partie B. Dans chacune des questions suivantes, A et B désignent deux événements d'un espace probabilisé.

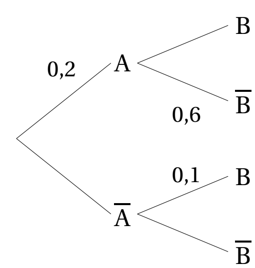
5. On suppose, dans cette question, que les deux événements A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,2$. On a alors :

a : $P(A \cap B) = 0,06$ | b : $P(A \cap B) = 0$ | c : $P_A(B) = P_B(A)$

6. On suppose $P(A) = 0,5$ et $P(B) = 0,7$. Il est alors possible que :

a : $P(A \cup B) = 1,2$ | b : $P(A \cup B) = 1$ | c : $P(A \cup B) = 0,35$

Dans les questions **7** et **8**, on considère une expérience aléatoire illustrée par l'arbre ci-contre.



7. D'après cet arbre, on a :

a : $P(B) = 0,5$ | b : $P(\overline{A} \cap B) = 0,1$ | c : $P_A(B) = 0,4$

8. D'après cet arbre, on a :

a : $P_B(A) = 0,4$ | b : $P_B(A) = 0,5$ | c : $P_B(A) = 0,8$

Exercice 4 *6 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. *(Unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées.)*

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 + \mathrm{X} - 2\mathrm{X}^2 = 0$.

   b. En déduire les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

3. Vérifier que l'on peut écrire $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2\right)$. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

4. **a.** Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(4 - \mathrm{e}^{x})$, puis étudier le signe de $f'(x)$.

   c. Dresser le tableau de variations de f. On montrera que le maximum de f est un nombre rationnel.

5. **a.** Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection, qu'on notera A et dont on déterminera les coordonnées.

   b. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

6. Déterminer une équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point A.

7. Afin d'obtenir une représentation précise, tracer les droites $\mathcal{D}$ et Δ, puis la courbe $\mathcal{C}$ *(graphique à faire sur la page numérotée 6/6)*.

Exercice 3.

Question n°	Réponse choisie		
1	**A**	**B**	**C**
2	**A**	**B**	**C**
3	**A**	**B**	**C**
4	**A**	**B**	**C**
5	**A**	**B**	**C**
6	**A**	**B**	**C**
7	**A**	**B**	**C**
8	**A**	**B**	**C**

Exercice 4. Représentation graphique.