Exercice 1

Partie A

1/ Nous constatons que f est une fonction composée :

$$f = \varphi \circ k \text{ avec } k : x \longmapsto ax$$

Par application de la composition des fonctions :

$$f'(x) = k'(x)\,\varphi(ax) = a\mathrm{e}^{ax} = af(x)$$

Par conséquent f vérifie cette équation différentielle.

2/ Par application de la *formule du produit* :

$$h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} + g(x)\left[-a\mathrm{e}^{-ax}\right] = ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0$$

Donc h est une fonction constante.

3/ D'après la question précédente, si g est une solution de l'équation alors :

$$g(x)\mathrm{e}^{-ax} = \mathrm{C} \qquad \text{soit encore} \qquad g(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$$

Partie B

1/ Par application des formules de cours :

$$u'(x) = \frac{2}{5}\sin(x) + \frac{1}{5}\cos(x)$$

Et par calcul :

$$2u(x) + \cos(x) = \frac{-4}{5}\cos(x) + \frac{2}{5}\sin(x) + \cos(x) = u'(x)$$

2/ D'après la partie A, $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution générale de E_0.

3/ • Si u et v sont solutions de (E) alors par différence :

$$v'(x) - u'(x) = 2v(x) - 2u(x) \text{ ou encore } (v-u)' = 2(v-u)$$

donc $(v-u)$ est solution de $(\mathrm{E}_0$.

• Réciproquement, si $(v-u)$ est solution de (E_0) alors

$$(v-u)' = 2(v-u) \text{ soit encore } v'(x) - u'(x) = 2v(x) - 2u(x) \text{ ou } v'(x) = u'(x) + 2v(x) - 2u(x)$$

ce qui donne

$$v'(x) = 2v(x) + \cos(x)$$

donc v est solution de (E).

4/ En assemblant nos résultats :

$$v(x) - u(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2x} \text{ donc } v(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{-2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)$$

5/ Nous posons $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc :

$$\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\pi} + \frac{-2}{5}\cos(\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{5}\sin(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{C} + \frac{1}{5\,\mathrm{e}^{\pi}} = 0$$

soit $\mathrm{C} = -\dfrac{1}{5\,\mathrm{e}^{\pi}}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2x-\pi} - \dfrac{2}{5}\cos(x) + \dfrac{1}{5}\sin(x)$

Exercice 2

1/ a/ La fonction affine $x :\longmapsto 6-x$ est décroissante et ses images sont dans $]0\,;+\infty[$; la fonction inverse $x :\longmapsto \dfrac{9}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$ est aussi décroissante ; donc par composition :

$$x :\longmapsto 6-x = y :\longmapsto \frac{9}{y} = f(x)$$

la fonction f est croissante.

b/ Une fonction croissante conserve l'ordre donc si $x < 3$ alors $f(x) < f(3)$; or $f(3) = 3$.

2/ a/ $\mathrm{U}_1 = 1$; $\quad \mathrm{U}_2 = \dfrac{9}{5}$ $\quad$ et $\quad \mathrm{U}_3 = \dfrac{45}{21} = \dfrac{15}{7}$

b/ • $\mathrm{U}_2 - \mathrm{U}_1 = \dfrac{4}{5}$ $\quad$ et $\quad \mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0 = 4$ donc la suite n'est pas arithmétique.

• $\dfrac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{U}_1} = \dfrac{4}{5}$ $\quad$ et $\quad \dfrac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{U}_0} = -\dfrac{1}{3}$ donc elle n'est pas géométrique.

c/ Nous voulons montrer que pour tout n la propriété $\mathrm{P}(n)\ :\ \mathrm{U}_n < 3$ est vraie.

- Initialisation : $\mathrm{U}_0 = -3 < 3$.
- Transmission : nous supposons que $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est à dire que $\mathrm{U}_k < 3$;
  nous avons montré en 1b qu'alors $f(\mathrm{U}_k) < 3$ soit encore que $\mathrm{U}_{k+1} < 3$.
- Conclusion : pour tout entier naturel n la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est à dire $\forall n \quad \mathrm{U}_n < 3$.

d/ À partir des valeurs calculées, nous pouvons conjecturer que la suite est croissante et démontrer par récurrence que pour tout n $\quad \mathrm{P}(n)\ :\ \mathrm{U}_n < \mathrm{U}_{n+1}$ est vraie.

- Initialisation : elle est obtenue dans la question 2a.
- Transmission : nous supposons que $\mathrm{P}(k)$ est vraie $\quad \mathrm{U}_k < \mathrm{U}_{k+1}$
  Alors, comme la fonction f est croissante et donc conserve l'ordre :
  $f(\mathrm{U}_k) < f(\mathrm{U}_{k+1})$ ou encore $\mathrm{U}_{k+1} < \mathrm{U}_{k+2}$
- Conclusion : la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout n, la suite est croissante.

3/ a/ Pour démontrer que la suite V est arithmétique, nous calculons la différence de deux termes consécutifs :

$$\mathrm{V}_{n+1} - \mathrm{V}_n = \frac{1}{\mathrm{U}_{n+1}-3} - \frac{1}{\mathrm{U}_n - 3} = \frac{1}{f(\mathrm{U}_n)-3} - \frac{1}{\mathrm{U}_n - 3}$$

Pour faciliter le calcul, posons $\mathrm{U}_n = u$ alors :

$$\mathrm{V}_{n+1} - \mathrm{V}_n = \frac{1}{\dfrac{9}{6-u}-3} - \frac{1}{u-3} = \frac{6-u}{3u-9} - \frac{1}{u-3} = -\frac{1}{3}$$

donc la suite V est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b/
- $\mathrm{V}_0 = \dfrac{1}{\mathrm{U}_0 - 3} = -\dfrac{2}{3}$ donc $\mathrm{V}_n = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{n}{3} = -\dfrac{1}{3}(n+2)$
- $\mathrm{U}_n = \dfrac{1}{\mathrm{V}_n} + 3 = -\dfrac{3}{n+2} + 3$

c/ La fonction inverse a pour limite 0 à l'infini donc U converge vers 3.

Exercice 3

Partie A

1/ C : si on substitue $z = 3 + i$ et $\overline{z} = 3 - i$ l'égalité est vérifiée.

2/ C : $z + i = x + i(y+1)$ et $i\overline{z} + 1 = ix + (y+1)$ ont même module.

3/ B : L'égalité se traduit par MA=MB, c'est la médiatrice de [AB].

4/ A : $-\sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

Partie B

1/ A : c'est une définition de l'indépendance de deux événements.

2/ B : en supposant que $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 0,2$ alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$; A n'est pas possible car A et B seraient incompatibles d'union plus large que l'univers et C non plus car la réunion est plus grande que l'un des deux événements.

3/ C : en complétant l'arbre, la probabilité portée sur la branche AB vaut : $\quad 0,4 = 1 - 0,6$

4/ B : en complétant l'arbre, la branche $\overline{\mathrm{A}}$ a pour probabilité 0,8 et par conséquent :
$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0,2 \times 0,4 + 0,8 \times 0,1 = 0,16$
par ailleurs, $\quad \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$
et par définition, $\quad \mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$, d'où le résultat.

Exercice 4

1/ a/ $\Delta = 9$ donc cette équation a deux solutions $X_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = 1$.

b/ En posant $X = e^{-x}$ cette équation *est identique* à la précédente, par conséquent ses solutions éventuelles vérifieront :

- soit $e^{-x} = -\dfrac{1}{2}$ équation qui n'a aucune solution car une exponentielle est toujours positive
- soit $e^{-x} = 1$ donc $x = 0$ qui est par conséquent l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

2/ Nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Par conséquent la droite $\mathscr{D}$ d'équation $f(x) = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3/ Par développement, l'expression proposée est égale à $f(x)$. Nous savons que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2e^{-2x} = \lim_{x\to-\infty} -2\frac{1}{(e^x)^2} = -\infty$$

4/ a/ $f'(x) = -e^{-x} + 4e^{-2x}$

b/
- $f'(x) = e^{-2x}(4 - e^x)$
- Une exponentielle est toujours positive donc $e^{-2x} > 0$
- Par conséquent $f'(x)$ est du même signe que $4 - e^x$
- La fonction exponentielle est croissante donc $x \longmapsto 4 - e^x$ est décroissante
- $4 - e^x = 0$ a pour solution $x = \ln(4) = 2\ln(2)$
- Une fonction décroissante *inverse l'ordre* par conséquent :
  si $x < 2\ln(2)$ alors $f'(x) > 0$ et si $x > 2\ln(2)$ alors $f'(x) < 0$

c/ Les variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{8}$	$\searrow$	1

Avec $f\big(2\ln(2)\big) = 1 + \dfrac{1}{4} - 2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{8}$

5/ a/ Nous cherchons les solutions éventuelles de $f(x) = 1$ donc de $e^{-x} - 2e^{-2x} = 0$ ou encore avec une factorisation de $e^{-x}\big(1 - 2e^{-x}\big) = 0$.

L'exponentielle n'est jamais nulle donc seul le second facteur peut s'annuler et $1 - 2e^{-x} = 0$ équivaut à $e^x = 2$ qui a pour solution unique $x = \ln(2)$.

b/ $f(x) - 1 = e^{-x}\big(1 - 2e^{-x}\big)$

- qui est du signe de $1 - 2e^{-x} = 0$ car le premier facteur est toujours positif.
- La fonction $x \longmapsto 1 - 2e^{-x}$ est croissante car composée de l'exponentielle (croissante) puis de la fonction inverse (décroissante) et enfin d'une fonction affine $x \longmapsto 1 - 2x$ décroissante.
- Par conséquent si $x < \ln(2)$ la courbe est sous la droite puis si $x > \ln(2)$ elle est au-dessus.

6/ En A :

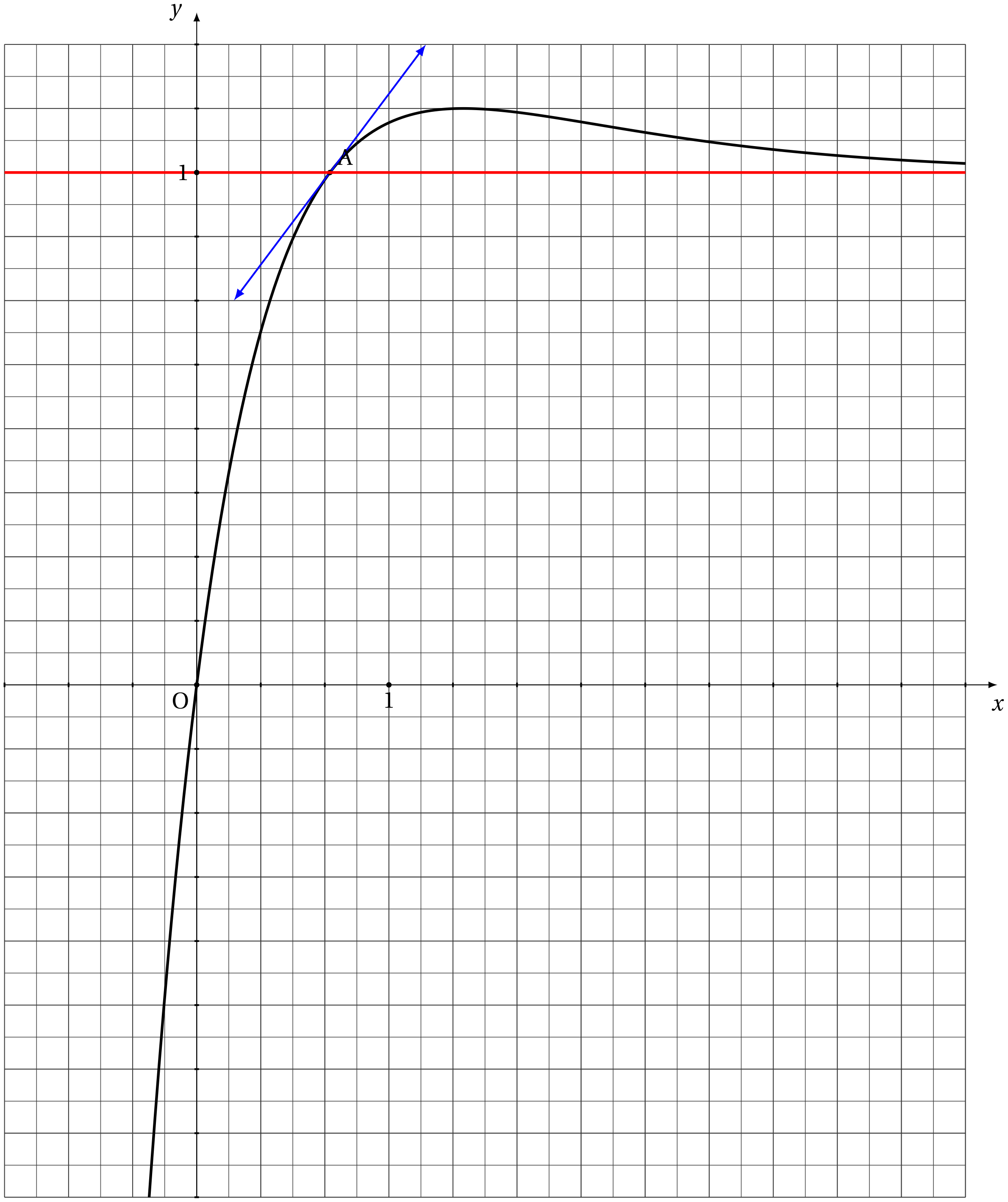
$$a = \ln(2) \qquad f(a) = 1 \quad \text{et} \quad f'(a) = -\frac{1}{2} + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Donc l'équation de la tangente est donnée par :

$$y - 1 = \frac{1}{2}\big(x - \ln(2)\big)$$

soit finalement

$$y = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}\ln(2)$$



y
1
A
O
1
x