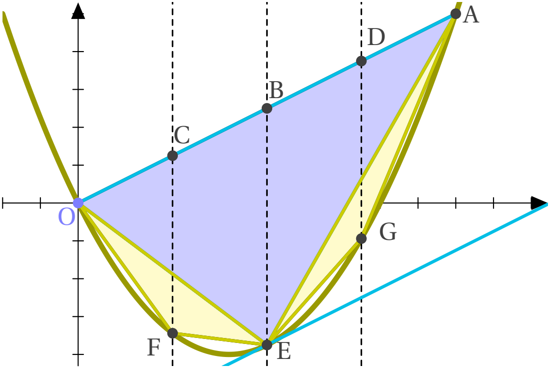
Calcul intégral

une problématique historique

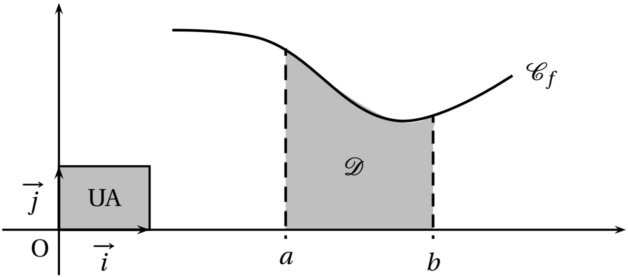
Du fond de l'histoire des mathématiques, une problématique est née : comment calculer l'aire enfermée par une courbe ?



Archimède (−282 −212) démontra dans une lettre à **Eratosthène** que l'aire du domaine compris entre l'arc OEA de parabole et le segment [OA] était égale à quatre tiers de l'aire du triangle OEA.

La méthode d'*exhaustion* utilisée a été inventée par **Eudoxe** (−406 −355).

Notre intention : définir mathématiquement comment calculer l'aire d'un *domaine* $\mathscr{D}$:



Une notation :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Aire}(\mathscr{D})$$

Une première définition :

Intégrale

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On appelle *intégrale* de f de a à b, que l'on note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a;b]$, c'est à dire l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}_f$,
- l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarques

- L'unité d'aire notée UA est égale à l'aire du rectangle de côté $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (ou encore du rectangle déterminé par [OI] et [OJ])
- L'intégrale, sous ces hypothèses, est positive.
- La variable x est dite "muette", on peut noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\theta)\mathrm{d}\theta = \cdots$$

Exemples

- Soit un repère tel que $||\overrightarrow{u_x}|| = 1$ cm et $||\overrightarrow{u_y}|| = 2$ cm alors 1UA=2 cm^2
- Soit un repère tel que $||\overrightarrow{u_x}|| = 10$ cm et $||\overrightarrow{u_y}|| = 5$ cm alors 1UA=50 cm^2

Remarques

- L'unité d'aire notée UA est égale à l'aire du rectangle de côté $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ (ou encore du rectangle déterminé par [OI] et [OJ])
- L'intégrale, sous ces hypothèses, est positive.
- La variable x est dite "muette", on peut noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\theta)\mathrm{d}\theta = \cdots$$

Exemples

- Soit un repère tel que $||\overrightarrow{u_x}|| = 1$ cm et $||\overrightarrow{u_y}|| = 2$ cm alors 1UA=2 cm^2
- Soit un repère tel que $||\overrightarrow{u_x}|| = 10$ cm et $||\overrightarrow{u_y}|| = 5$ cm alors 1UA=50 cm^2

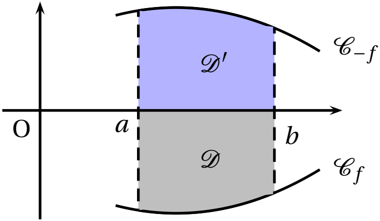
Définition

Soient f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ calcule l'opposé de l'aire du domaine $\mathscr{D}'$ délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}_{-f}$
- l'axe des abscisses
- et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\text{Aire}(\mathscr{D}')$$



Fonction négative

- L'intégrale d'une fonction négative sur $[a\,;\,b]$ est négative.
- Ainsi Aire $(\mathscr{D}) = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b (-f)(x)\mathrm{d}x$

Fonction continue

Soient f une fonction continue et de signe quelconque sur $[a;b]$ alors l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

est la somme des aires *algébriques* des domaines situés entre sa courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses sur $[a\,;\,b]$:

- on additionne les aires *géométriques* des intervalles où f est positive
- et on soustrait les aires *géométriques* des intervalles où f est négative.

Fonction négative

- L'intégrale d'une fonction négative sur $[a\,;\,b]$ est négative.
- Ainsi Aire $(\mathscr{D}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b (-f)(x)\mathrm{d}x$

Fonction continue

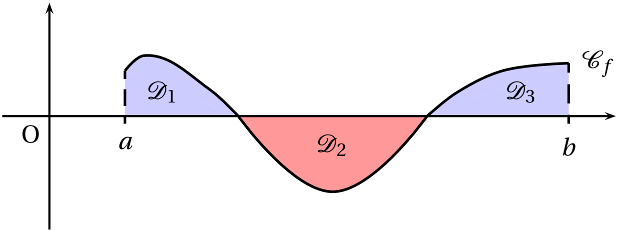
Soient f une fonction continue et de signe quelconque sur $[a;b]$ alors l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

est la somme des aires *algébriques* des domaines situés entre sa courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses sur $[a\,;\,b]$:

- on additionne les aires *géométriques* des intervalles où f est positive
- et on soustrait les aires *géométriques* des intervalles où f est négative.

Application du principe

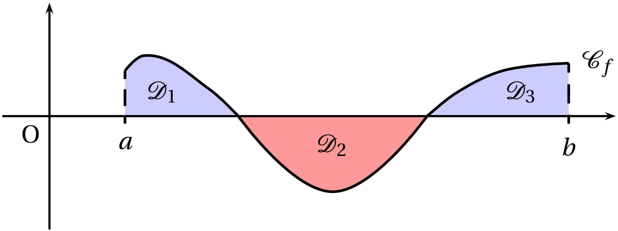


$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{Aire}(\mathscr{D}_1) - \text{Aire}(\mathscr{D}_2) + \text{Aire}(\mathscr{D}_3)$$

Conventions

- Si $a = b$ alors $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Application du principe



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{Aire}(\mathscr{D}_1) - \text{Aire}(\mathscr{D}_2) + \text{Aire}(\mathscr{D}_3)$$

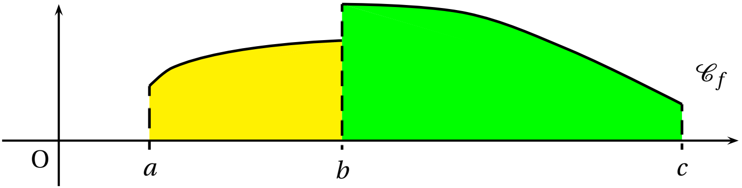
Conventions

- Si $a = b$ alors $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient trois réels a, b et c de I. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



Exemple Soit f la fonction partie entière sur $[1\,;3]$

$$\int_1^3 \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$ et α un réel. Alors

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemples

$$\int_2^5 x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_2^5 x\,\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_2^5 \frac{\pi}{x}\,\mathrm{d}x = \pi \int_2^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Positivité

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

En d'autres termes...

Si la fonction est positive, le calcul de l'intégrale nous donne un nombre positif.

Ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$. Si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple

Nous savons que $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x$$

soit finalement :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout x dans $[a; b]$ alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Démonstration

Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors :

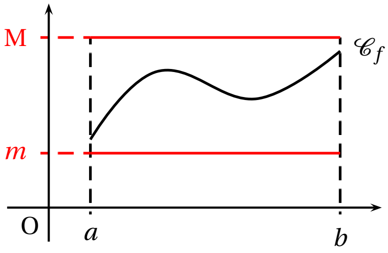
$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Or

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$$

et

$$\int_a^b M\,dx = M(b-a)$$



Valeur moyenne

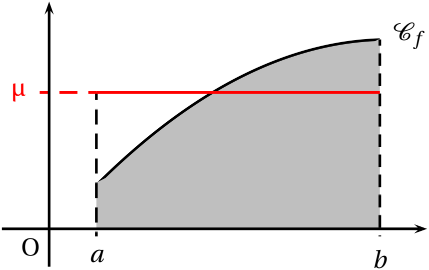
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La *valeur moyenne* de f sur $[a\,;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation

La valeur moyenne μ peut être interprétée comme la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a\,;b]$ et ayant une aire égale à l'intégrale de la fonction, car :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Exemple

Calcul de la valeur moyenne de la fonction cosinus sur $[0\,;\pi]$

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

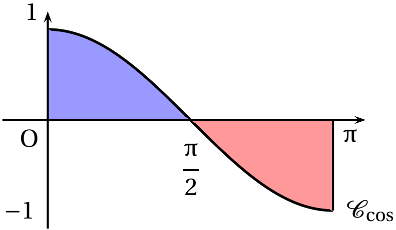
$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mu = 0$$

car

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

par symétrie.



Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.
Pour tout point a de I, soit la fonction F définie par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors :

- F a pour fonction dérivée f (autrement dit $\mathrm{F}' = f$ ou encore F est une primitive de f)
- F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule pour $x = a$

Rappel

$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites (verticales) d'équations $t = a$ et $t = x$.

Démonstration

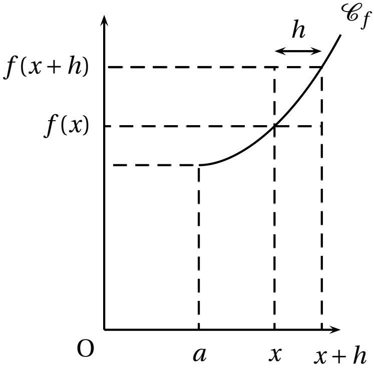
Nous démontrons ce théorème dans le cas où la fonction f est croissante sur I et on admettra le cas général. Afin d'éviter toute confusion, on note t la variable.
Soit h un réel tel que $x+h$ soit toujours compris dans l'intervalle I.

F$(x+h)$ est alors l'aire comprise entre
$t = a$ et $t = x+h$
et F$(x+h)-$F(x) est donc l'aire comprise entre
$t = x$ et $t = x+h$.
Puisque f est croissante, on peut affirmer, en supposant h positif, que

$$h \times f(x) \leqslant \mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) \leqslant h \times f(x+h)$$

et donc que

$$f(x) \leqslant \frac{\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$



Or, puisque f est continue en x : $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$
Et, en application du théorème des gendarmes, on peut déduire que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h} = f(x)$$

La fonction F est donc bien dérivable pour tout x dans $[a;b]$, et sa dérivée est la fonction f. De plus :

$$\mathrm{F}(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Notation

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

Preuve : Il suffit d'appliquer Chasles.

Exemples

- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} = \ln(\mathrm{e}) - \ln(1) = 1$
- $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$
- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}(\ln(x))^2]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}(\ln(\mathrm{e}))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2 = \frac{1}{2}$

  car si

  $$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(x) = u'(x)u(x)$$

  alors

  $$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}(u(x))^2$$

Exemples

- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} = \ln(\mathrm{e}) - \ln(1) = 1$

- $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sin(x)\right]_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$

- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\left(\ln(\mathrm{e})\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln(1)\right)^2 = \frac{1}{2}$

  car si
  $$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(x) = u'(x)\,u(x)$$
  alors
  $$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\left(u(x)\right)^2$$

Exemples

- $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^{e} = \ln(e) - \ln(1) = 1$

- $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$

- $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = [\frac{1}{2}(\ln(x))^2]_1^{e} = \frac{1}{2}(\ln(e))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2 = \frac{1}{2}$

  car si
  $$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(x) = u'(x)u(x)$$
  alors
  $$F(x) = \frac{1}{2}(u(x))^2$$

Proposition

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)\ v(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\ v'(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{donc} \quad u'v = (uv)' - uv'.$$

D'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Or :

$$\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b$$

La méthode repose sur un choix

- $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ **choix :** $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$ donc $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$

  $$\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \left[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1.$$

  Au passage, on a déterminé une primitive $\mathrm{F}(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$ de $f(x) = x\mathrm{e}^x$

  Vérification : $\mathrm{F}'(x) = \ldots$

- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ **choix :** $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$ donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

  $$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \left[x\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_0^{\mathrm{e}} x \,\mathrm{d}x = \left[x\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \left[x\right]_1^{\mathrm{e}} = \left[x\ln(x) - x\right]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$$

  Au passage, on a déterminé une primitive $\mathrm{F}(x) = x\ln x - x$ de $f(x) = \ln x$

  Vérification : $\mathrm{F}'(x) = \ldots$

La méthode repose sur un choix

- $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ **choix :** $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$ donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

  $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = \left[xe^x - e^x\right]_0^1 = e - e + 1 = 1.$

  Au passage, on a déterminé une primitive $F(x) = xe^x - e^x$ de $f(x) = xe^x$

  Vérification : $F'(x) = \dots$

- $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$ **choix :** $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$ donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

  $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_0^e x\,dx = \left[x\ln(x)\right]_1^e - \left[x\right]_1^e = \left[x\ln(x) - x\right]_1^e = e - e + 1 = 1$

  Au passage, on a déterminé une primitive $F(x) = x\ln x - x$ de $f(x) = \ln x$

  Vérification : $F'(x) = \dots$