EXERCICE 1 **6 points**

1/ a/ Trois points A, B et C déterminent un plan si deux vecteurs formés par ces trois points ne sont pas colinéaires :

$\overrightarrow{AB}\,(-4;2;0)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-4;0;3)$ ne sont pas colinéaires : $\dfrac{-4}{-4} \neq \dfrac{0}{3}$

b/ Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan :

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -12+12 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

c/ Une équation d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(3\,;6\,;4)$ est de la forme : $3x+6y+4z+d=0$.

Comme, de plus, A appartient au plan, ses coordonnées doivent vérifier l'équation précédente : $12+d=0$. D'où le résultat.

d/ La distance δ_E est exprimée par la formule :

$$d\big(E,(ABC)\big) = \frac{|3x_E+6y_E+4z_E-12|}{\sqrt{3^2+6^2+4^2}} = \frac{122}{9\sqrt{61}} = \frac{2\sqrt{61}}{9}$$

2/ a/ Un vecteur directeur de la droite $(\mathscr{D})$ est obtenu par lecture des coefficients de t dans les équations paramétriques : $\overrightarrow{d}\ :\left(1\,;2\,;\dfrac{4}{3}\right)$.

Pour montrer que $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à (ABC), nous vérifions que $\overrightarrow{d}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$ (que les coordonnées sont proportionnelles) :

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{4}{\frac{4}{3}}$$

Avec $t = -\dfrac{1}{3}$ nous vérifions que E est un point de $(\mathscr{D})$.

b/ Comme $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à (ABC) et que E est un point de $(\mathscr{D})$, le projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC) est l'intersection de $(\mathscr{D})$ et de (ABC) : dans l'équation de (ABC), nous substituons les équations paramétriques à x, y et z puis calculons la valeur de t qui nous donne les coordonnées de G :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \frac{5}{9}+\frac{4}{3}t \\ 3x+6y+4z-12 & = & 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \frac{5}{9}+\frac{4}{3}t \\ 3(1+t)+12t+4\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{3}\right)t-12 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} x & = & \frac{4}{3} \\ y & = & \frac{2}{3} \\ z & = & 1 \\ t & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

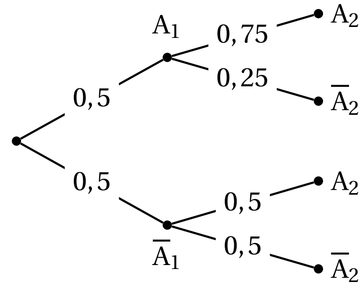
G a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},1\right)$.

c/ Nous vérifions que $EG = \delta_E$:

$$GE = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{16}{9}+\frac{64}{81}} = \sqrt{\frac{244}{81}} = \frac{2\sqrt{61}}{9} = \frac{122}{9\sqrt{61}}$$

EXERCICE 2 **6 points**

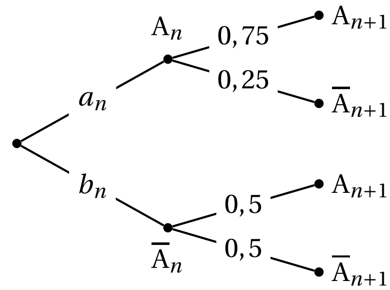
1/ D'après l'énoncé $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_1 = 1 - a_1 = \dfrac{1}{2}$.



D'après l'arbre et en appliquant le théorème des probabilités totales :

$a_2 = a_1 P_{A_1}(A_2) + b_1 P_{\overline{A_1}}(A_2)$ et $b_2 = 1 - a_2$.

2/ On refait un arbre et on utilise encore la formule des probabilités totales :



$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$$

3/ Étude de la suite arithmético-géométrique

a/ Nous devons montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$:

$U_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}a_n - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}U_n$.

(U_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = -\dfrac{1}{6}$.

b/ Par définition : $U_n = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ (car la suite commence à $n = 1$) et $a_n = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n} + \dfrac{2}{3}$

c/ La suite U_n est géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 donc converge vers zéro.

Et la suite (a_n) converge donc vers $\dfrac{2}{3}$.

d/ Le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}6665$ est obtenu en travaillant sur l'inégalité :

$$a_n \geqslant 0{,}6665 \iff \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \geqslant 0{,}6665 \iff 6\left(\frac{2}{3} - 0{,}6665\right) \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\iff \ln\left(6\left(\frac{2}{3} - 0{,}6665\right)\right) \geqslant (n-1)\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

On obtient finalement : $n \geqslant 1 + \dfrac{4 - 6 \times 0{,}6665}{\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)} \geqslant 5{,}98$.

Le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$ est donc 6.

On peut aussi (plus simplement) vérifier avec la calculatrice que $a_5 \leqslant 0{,}6665 \leqslant a_6$

EXERCICE 3 **8 points**

Partie A : existence et unicité de la solution

1/ La fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est somme de deux fonctions continues strictement croissantes donc est continue et strictement croissante.

2/ Pour démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, nous vérifions que nous pouvons appliquer les théorème des valeurs intermédiaires.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Sur $]0\,;\,+\infty[$ f est donc continue et strictement croissante vers $]-\infty\,;\,+\infty[$
- $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$ donc l'équation admet une solution unique.

3/ f est strictement croissante et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ et $f(1) > 0$ donc si $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0 \leqslant f(1)$ alors $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

1/ Étude de quelques propriétés de la fonction g.

a/ Le calcul de la dérivée nous donne le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:
g est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ elle est donc dérivable et
$f'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{4x-1}{5x}$
qui est du signe de $4x-1$, donc négative sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$

b/ Nous vérifions que $\dfrac{1}{2} < g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et que $g(1) < 1$. Comme la fonction est strictement croissante,

si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ alors $\dfrac{1}{2} < g\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant g(x) \leqslant g(1) < 1$

c/ L'égalité $g(x)=x$ est équivalente à l'égalité $f(x)=0$ donc à (E).

2/ On considère la suite (u_n).

a/ Nous avons déjà démontré l'encadrement par $\dfrac{1}{2}$ et par 1, il nous reste à démontrer par récurrence $\mathrm{P}(n) : u_n \leqslant u_{n+1}$.

- Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a vu que $u_1 = g(u_0) \approx 0{,}53$ donc $u_0 \leqslant u_1$
- Transmission : Supposons que $\mathrm{P}(k)$ est vraie, $u_k \leqslant u_{k+1}$
  Nous savons que g est strictement croissante sur cet intervalle donc conserve l'ordre, c'est à dire que $g(u_k) \leqslant g(u_{k+1})$ ce qui s'écrit $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$
  La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est démontrée.
- Conclusion : $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout n.

b/ La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc converge. De plus, α est solution de $g(\mathrm{L}) = \mathrm{L}$, c'est donc la limite cherchée.

3/ *Bonus :* Recherche d'une valeur approchée de α

a/ La calculatrice donne $u_{10} \approx 0{,}567\,124$ à 10^{-6} près.

b/ Comme u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α, $u_{10} < \alpha < u_{10} + 5.10^{-4}$ puis on encadre au millième :
$0{,}567 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}568$

Antilles-Guyane Septembre 2009

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;1]$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;1]$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
T est la droite d'équation $y = x$.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.

1/ **a/** Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

b/ En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0\ ;\ 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$, on a $f(x) \leqslant 1$.

2/ **a/** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$.

b/ Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3/ On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x - x.$$

a/ Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\ ;1]$ et dresser le tableau de variation de g.
On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b/ En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

4/ Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.
On pose $\mathrm{I}(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} \left[1 - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

a/ À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathrm{I}(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

b/ Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} \mathrm{I}(\alpha)$.

c/ Interpréter graphiquement le résultat précédent.

d/ À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et l'axe des ordonnées.