Antilles-Guyane sept-2007
Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de I.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

Pondichéry avril 2008
EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1\,;\,+\infty[$

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

b. En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

c. Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \leqslant \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$ puis de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Liban juin 2008
EXERCICE 4 **5 points**

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $(\mathscr{C})$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. **a.** Interpréter graphiquement $g(2)$.

   b. Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.
3. **a.** Soit x un réel supérieur à 2.

   Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel t, $f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t}+1$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que pour tout réel x, $g(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Am-Nord mai 2008

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

   b. Étudier les variations de la suite (x_n).

   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   b. En déduire la limite de la suite (x_n).
3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

   $x_{n+1} = -(n+1)\,y_n + \sin(1)$.

   b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nx_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ny_n$.

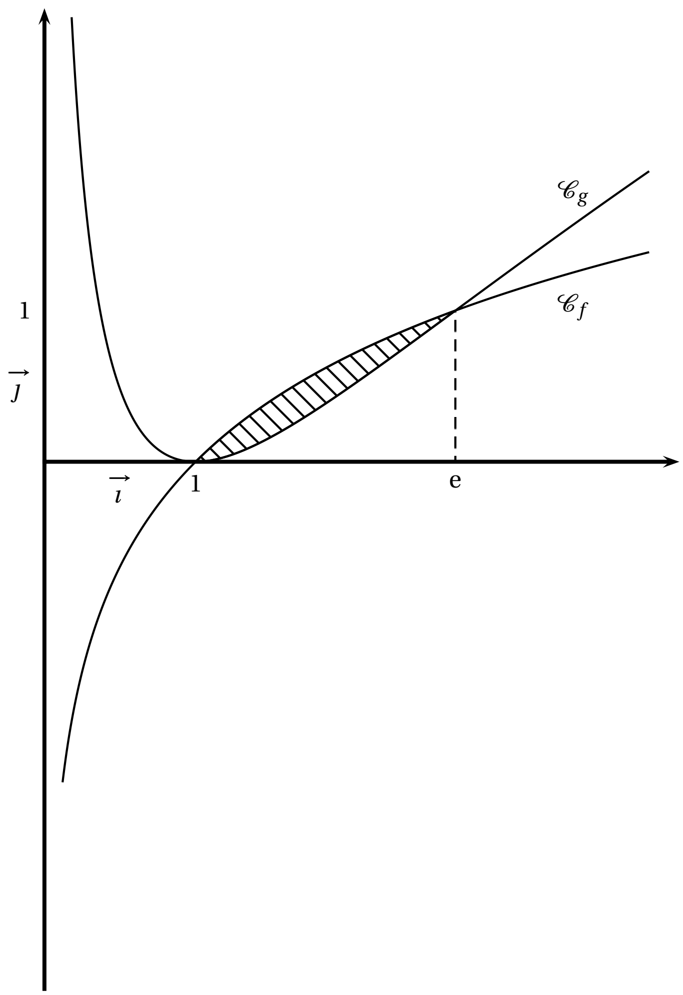
France métro juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln(x))^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)^2\,\mathrm{d}x$.

- **a.** Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
- **b.** Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$.
- **c.** En déduire J.
- **d.** Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Réunion juin 2008

EXERCICE 2 — **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés en annexe,

1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.
   Énoncer puis démontrer ces propriétés.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-t-il des tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ \infty[$ par

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Que représente f pour la fonction g ?
   b. En déduire le sens de variations de g sur $]0\ ;\ \infty[$.
2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $g(x) = 1 - \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.
   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	0

ANNEXE exercice 2