EXERCICE 1

1/ • Pour tout $x > 1$: $x < x^2$.

• De plus, nous savons que la moyenne (isobarycentre) de deux nombres est toujours comprise dans l'intervalle formé par ces deux nombres donc :

$$x \leqslant \frac{x+x^2}{2} \leqslant x^2$$

• Enfin, la fonction inverse étant décroissante sur les positifs, elle inverse l'ordre donc :

$$\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{2}{x+x^2} \leqslant \frac{1}{x}$$

• La fonction ln est croissante donc respecte l'ordre et par conséquent si $1 < x$ alors $0 < \ln(x)$; on peut donc multiplier l'inégalité précédente par $\ln(x)$ sans changer le sens de l'inégalité.

2/ a/ • $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ nous suggère le tableau :

fonction	dérivée
$u : \ln(x)$	$u' : \frac{1}{x}$
$u^2 : \ln^2(x)$	$2u'u : 2\frac{1}{x}\ln(x)$
$\frac{1}{2}u^2 : \frac{1}{2}\ln^2(x)$	$u'u : \frac{\ln(x)}{x}$

Donc $I = \left[\frac{1}{2}\ln(x)^2\right]_2^4 = \frac{3}{2}\ln^2(2)$

• $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ nous suggère le tableau d'intégration par partie :

fonction	dérivée
$u : \ln(x)$	$u' : \frac{1}{x}$
$v : -\frac{1}{x}$	$v' : \frac{1}{x^2}$

d'où $J = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_2^4 - \displaystyle\int_2^4 -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

ce qui mène à $J = \left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{\ln(2)+1}{2} - \frac{2\ln(2)+1}{4} = \frac{1}{4}$

b/ • En application des propriétés de cours des intégrales :

si sur un intervalle $[a\,;\,b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

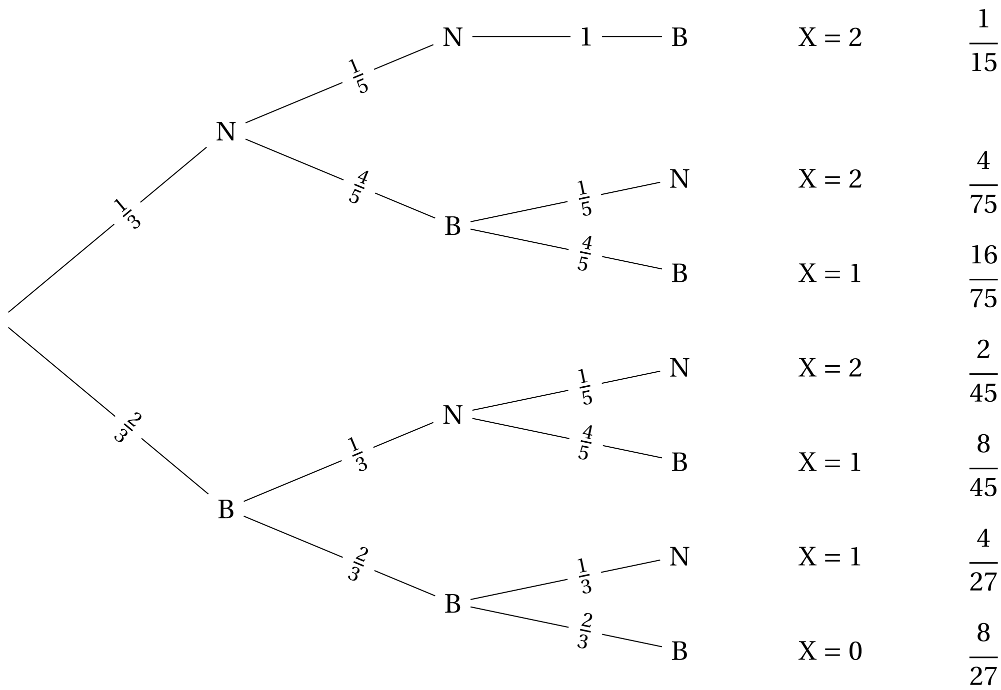
• et d'après l'encadrement de la question 1 :

on obtient $J \leqslant K \leqslant I$ soit $\frac{1}{4} \leqslant K \leqslant \frac{3}{2}\ln^2(2)$

3/ • Le domaine présenté correspond à : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

• La figure montre que l'unité d'aire vaut 4 cm^2 donc en cm^2 : $1 \leqslant K \leqslant 2{,}9$

EXERCICE 2



1/ **a/** Il n'y a que deux boules noires donc X varie de 0 à 2.

b/ Ne tirer aucune noire équivaut à tirer successivement trois blanches. Le tirage d'une blanche ne modifie pas l'univers donc les trois tirages de blanches sont indépendants :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 \cap \mathrm{B}_3) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

On peut considérer que cette expérience est une épreuve de Bernoulli avec pour le tirage d'une blanche $p = \dfrac{2}{3}$ mais la répétition avec $n = 3$ ne nous donne pas une loi binomiale $\mathscr{B}\left(3\,;\,\frac{2}{3}\right)$ car le tirage d'une noire modifie l'univers et il n'y a donc pas indépendance entre les épreuves.

c/ i. Pour tirer une boule noire au second tirage uniquement, il faut successivement tirer une blanche puis une noire puis une blanche. Donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{B}_3) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{N}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{B} \cap \mathrm{N}}(\mathrm{B})$$

et d'après l'arbre, nous obtenons effectivement $\dfrac{8}{45}$

ii. D'après l'arbre P(X = 1) est la somme de trois issues incompatibles :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \mathrm{P}\big((\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{B}_2 \cap \mathrm{B}_3) \cup (\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{B}_3) \cup (\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 \cap \mathrm{N}_3)\big) = \frac{16}{75} + \frac{8}{45} + \frac{8}{27} = \frac{364}{675}$$

2/ Les calculs :

- $k-1$ boules blanches (qui laissent l'urne inchangée) puis une noire :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}$$

- Nous savons que la dernière boule tirée est la seule noire (il n'en reste donc qu'une seule sur cinq boules donc quatre blanches) puis il y a $n-k$ boules blanches qui ne modifient pas l'univers :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

- N est la réalisation simultanée de A et de B :

$$\mathrm{P}(\mathrm{N}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$