α β γ δ ε η θ φ **2 heures** χ λ μ ν π ρ σ ω

Exercice 1

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

   On supposera connus les seuls résultats suivants :

   - $e^0 = 1$
   - Pour tous réels x et y, $\quad e^x e^y = e^{x+y}$

   Démontrer que pour tout réel x, $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

2. Récurrence

   On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

   $$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   Démontrer pour tout entier naturel que la proposition $\mathscr{P}_n$:

   $$t_n = \frac{n}{n+1}$$

   est vraie.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres. Il faut justifier les réponses en détaillant un minimum les calculs.

1. Simplifier les expressions suivantes :

   (a) $A = \left(\dfrac{e^2 + e^{-2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}\right)^2$ (b) $B = \dfrac{e^{1,2} \times e^{-0,4}}{e^{-3,2}}$ (c) $C = \left(e^2\right)^3 \times \sqrt{e^3}$

2. Résoudre dans $\mathbf{R}$, lorsque c'est possible, les équations suivantes :

   (a) $e^{2x-2} = e$ (b) $e^{x^2-6x-7} = e^0$ (c) $e^{3x+2} = -e$

3. Calculer la dérivée de la fonction g définie par : $x \longmapsto (x^2 - 3x - 2)\, e^{-2x}$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbf{R}^+ = [0\,;+\infty[$ par : $x \longmapsto 3x + 2 + e^{-x}$.

   (a) déterminer le signe de f sur $\mathscr{D}$,

   (b) déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. On rappelle que : $\ln(1) = 0$ et que $\ln(e) = 1$. Simplifier le plus complètement possible les expressions suivantes.

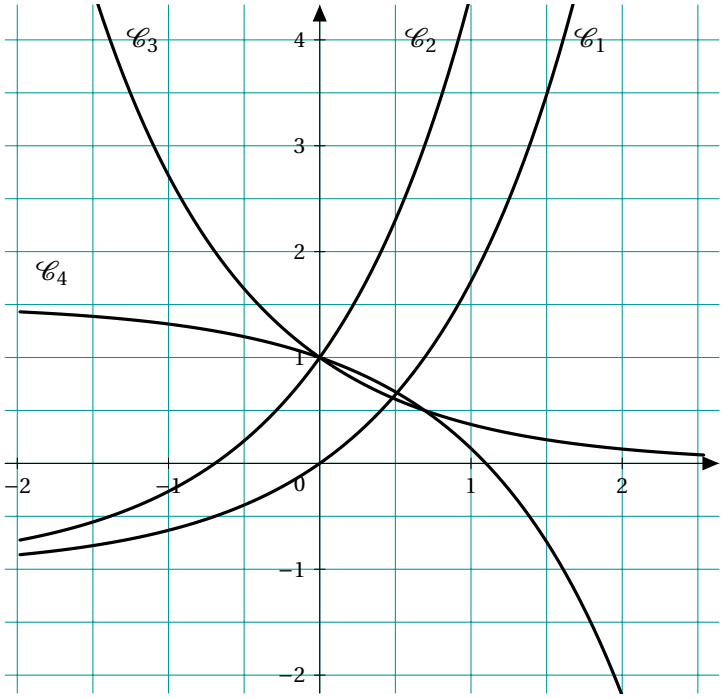
   (a) $A = \ln(2) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - \ln\left(e^{-2}\right) - 2$

   (b) $B = \ln(243) - \ln\left(\dfrac{1}{81}\right) + 6\ln(\sqrt{3})$

   (c) $C = \ln\left[(\sqrt{2}-1)^{142}\right] + \ln\left[(\sqrt{2}+1)^{142}\right]$

Exercice 3

Identifier parmi les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ celle représentant respectivement chacune des fonctions suivantes. *Il faut argumenter chaque réponse.*



- $f_1 : x \mapsto 2\,\mathrm{e}^x - 1$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{3-\mathrm{e}^x}{2}$
- $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$
- $f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$

Exercice 4

Dans cet exercice, la fonction f est définie sur $\mathscr{D}_f =]-1\,;+\infty[$ par

$$x \longmapsto \frac{2x+1}{x+1}$$

1. (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   (b) Étudier le signe de f' sur $\mathscr{D}_f$ et en déduire les variations de f sur $\mathscr{D}_f$.

2. Démontrer que f est dérivable en 0 $\left(\text{on calculera } \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\ldots\right)$.

3. (a) Calculer une approximation affine de f en 1.
   (b) Expliquer un moyen simple de calculer une valeur approchée, sans calculatrice, de $f(1,02)$.

4. (a) Vérifier que $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ et en déduire $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.
   (b) En déduire, par des connaissances de cours, que $y = 2$ est asymptote à f en $+\infty$.

5. **[bonus]** On définit la fonction g sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(h) = f(-1+h)$. Étudier la limite de g en zéro et en déduire la limite de f en -1.

6. Résumer l'étude complète de f par un tableau de variations.