Écrire chacun des nombres complexes sous forme algébrique.

8 a) $5i-(3+2i)$; b) $2(5-i)+3(i-4)$.

9 a) $(-4+2i)^2$; b) $(5-11i)(2-i)$; c) $(1+i)^3$.

10 a) $(i+2)^2-(3-5i)$; b) $\sqrt{2}+i-(\sqrt{2}+3i)^2$.

11 a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{2006}$.

12 Écrire sous forme algébrique l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=2+i$; $z_2=\sqrt{3}-i$; $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

12 Écrire sous forme algébrique l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 2 + i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$; $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

- $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{\overline{z_1}}{z_1 \overline{z_1}} = \dfrac{2 - i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5} i$

- $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{\overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4} i$

- $\dfrac{1}{z_3} = \dfrac{\overline{z_3}}{z_3 \overline{z_3}} = \dfrac{\overline{z_3}}{1} = \overline{z_3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

l'inverse d'un complexe de module 1 est son conjugué

$|z| = 1$ donc $z\overline{z} = 1$ $\left(= |z|^2\right)$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{1} = \overline{z}$$

b) $\sqrt{2} + i - (\sqrt{2} + 3i)^2$.

$$(\sqrt{2} + 3i)^2 = (\sqrt{2})^2 + (3i)^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 3i$$
$$= 2 - 9 + 6\sqrt{2}\, i$$
$$= -7 + 6\sqrt{2}\, i$$

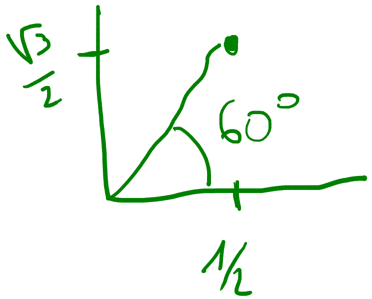
b) $= \sqrt{2} + i + 7 - 6\sqrt{2}\, i$
$$= (\sqrt{2} + 7) + i(1 - 6\sqrt{2})$$

$$z^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \left[e^{i\pi/3}\right]^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} + i^2\frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\downarrow \qquad = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

image $A\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ $= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$



$\longrightarrow$ z^2 a pour image $B\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad a^{2006} ?$$

$$a = e^{i\pi/3} \quad \text{dc} \quad a^{2006} = e^{i\frac{2006\pi}{3}}$$

$$\frac{2006\pi}{3} = \left(\frac{6 \times 334 + 2}{3}\right) \times \pi$$

$$= \left(2 \times 334 + \frac{2}{3}\right)\pi$$

$$= 2\pi \times 334 + \frac{2\pi}{3}$$

$$a^{2006} = \underbrace{\left(e^{i2\pi}\right)}_{=1}{}^{334} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$a^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$a^3 = -1$ donc $a^6 = 1$ $\quad a^6 = (a^3)^2$

$$2006 = 6 \times 334 + 2$$

$$a^{2006} = a^{6\times 334 + 2} = (a^6)^{334} \times a^2$$

$$a^{2006} = a^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

page 310

14 f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = (1 - i)\, z^2 - (1 - 3i)\, z + 4.$$

Calculer $f(i)$; $f\left(\dfrac{1}{i}\right)$; $f\left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)$.

immédiatement

pour mercredi

Calculer = mettre ss forme algébrique le résultat

```
(%i11) f(z):=(1-%i)*z^2-(1-3*%i)*z+4;
(%o11) f(z):=(1-%i) z^2 -(1-3 %i) z+4
(%i12) f(%i);
(%o12) -(1-3 %i) %i+%i+3
(%i13) ratsimp(%);
(%o13) 0
```

15 z est un nombre complexe distinct de 1, de forme algébrique $x + iy$ (x et y réels).
Déterminer, dans les deux cas suivants, la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe Z.

a) $Z = \dfrac{2iz}{z-1}$; b) $Z = z^2 - 2z + 3$.

Commencer par b) en posant $z = x + iy$
et en cherchant à écrire le résultat ss forme $Z = X + iY$

b) $(x+iy)^2 - 2(x+iy) + 3$

$Z = x^2 - y^2 + 2ixy - 2x - 2iy + 3$

$Z = (x^2 - y^2 - 2x + 3) + i(2xy - 2y)$

$Re(Z) = x^2 - y^2 - 2x + 3$

$Im(Z) = 2xy - 2y$

$$Z = \frac{2iz}{z-1} = \frac{2i(x+iy)}{(x+iy)-1} = \frac{-2y+2ix}{(x-1)+iy}$$

Pour mettre Z sous forme algébrique, il faut rendre réel le dénominateur ... en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué de l'actuel dénominateur

$$\overline{(x-1)+iy} = (x-1) - iy$$

et

$$[(x-1)+iy][(x-1)-iy] = (x-1)^2 + y^2$$

Au numérateur :

$$(-2y+2ix)([x-1]-iy)$$

$$(-2y(x-1) - 2i^2xy) + i(2x(x-1) + 2y^2)$$

$$(-2yx + 2y + 2xy) + i(2x^2 + 2y^2 - 2x)$$

$$2y + i(2x^2 + 2y^2 - 2x)$$

Finalement

$$Z = \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} + i\,\frac{2(x^2+y^2-x)}{(x-1)^2+y^2}$$

à terminer pour mercredi

+ 36

28 On pose $z = x + iy$ (x, y réels).

a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $3\bar{z} - 2iz$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\bar{z} - 2iz = 5 - 3i$.

36 Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, puis les écrire sous forme trigonométrique.

a) $z_1 = -\sqrt{3} + i$;

b) $z_2 = -17$;

c) $z_3 = 5i$;

d) $z_5 = -6\sqrt{3} + 6i$.

37 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

a) $z_1 = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

b) $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

52 a) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $4e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

b) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes :

20 ; -7 ; $7i$; $\dfrac{-i}{\sqrt{2}}$; $3-3i$; $\left(\sqrt{3}+i\right)^5$ et $\dfrac{4}{1+i}$.

54 On donne :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} \; ; \; z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}} \; ; \; z_3 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

Donner la forme exponentielle puis la forme algébrique des complexes $z_1 z_2 z_3$; $\dfrac{z_1}{z_2 z_3}$; z_2^2 et z_3^6.

55 Simplifier :

$$\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \quad (\theta \text{ réel}).$$