Exercice 1 : limites 10 points

1. Nous utilisons le théorème : *«à l'infini», tout polynôme a même limite que son terme de plus haut degré* et son corollaire *«à l'infini», la limite d'un quotient de polynômes est celle du quotient des termes de plus haut degré.*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

2. En -1, le numérateur vaut 6 (positif) et le dénominateur 0, il faut donc distinguer entre avant -1 et après -1 en partant du signe de $x+1$:
   - $x \mapsto x+1$ est une fonction affine croissante

x		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$

   - $\displaystyle\lim_{x\to-1,\, x<-1} \frac{x^2-3x+2}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1,\, x>-1} \frac{x^2-3x+2}{x+1} = +\infty$

3. En 2, le numérateur et le dénominateur sont nuls, il faut donc factoriser le numérateur pour déceler une possible simplification : $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ par conséquent :
$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to2} x-1 = 1$$

4. Nous retrouvons une situation identique à la question précédente donc factorisation :
$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

5. Nous ne pouvons déterminer la limite du dénominateur tel qu'écrit, il nous faut donc transformer le quotient en utilisant le dénominateur conjugué :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{2} = +\infty$$

Exercice 2 : asymptotes 4 points

1. La fonction affine et la fonction exponentielle sont définies sur $\mathbf{R}$ donc $\mathbf{D} = \mathbf{R}$.

2. Cette fonction n'admet pas d'asymptote verticale car elle est définie en tout point.

3. Nous savons que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty$. Par conséquent, f n'est pas de la forme $ax+b+g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ et n'admet a priori pas d'asymptote en $-\infty$.

4. En $+\infty$, f est de la forme $ax+b+g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x-1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

5. L'exponentielle est toujours positive donc $g(x)$ est tjrs négatif et $\mathscr{C}_f$ est sous l'asymptote $\mathscr{D}$.

Exercice 3 : équation différentielle 6 points

1. Soit $\mathscr{E}$ l'équation différentielle : $4y' + y = x+6$ et $g : x \mapsto ax+b$ une solution de $\mathscr{E}$.
   (a) Sachant que «g vérifie l'équation différentielle» $\mathscr{E}$: $4g'(x) + g(x) = x+6$ et du fait que $g'(x) = a$ l'équation $\mathscr{E}$ devient $4a + (ax+b) = x+6$.
   (b) L'équation précédente s'écrit $ax + (4a+b) = x+6$ et par conséquent $a = 1$ et $4a+b = 6$ donc $b = 2$. Au final : $g(x) = x+2$

2. Soit l'équation $\mathscr{F}$: $4y' + y = 0$.
   (a) Les solutions h de cette équation s'écrivent : $h(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

(b) Si f est solution de $\mathscr{E}$ alors

- $4f'(x) + f(x) = x + 6$ donc $(4f'(x) + f(x)) - (4g'(x) + g(x)) = (x + 6) - (x + 6) = 0$
- ce qui peut s'écrire $4(f'(x) - g'(x)) + (f(x) - g(x)) = 0$
- donc $h = f - g$ est solution de $\mathscr{F}$.

(c) Si h est solution de $\mathscr{F}$ alors

- $4h'(x) + h(x) = 0$ donc par addition $(4g'(x) + g(x)) + (4h'(x) + h(x)) = (x + 6) + 0$,
- ce qui s'écrit : $4(g'(x) + h'(x)) + (g(x) + h(x)) = x + 6$
- et donc $f = g + h$ est solution de $\mathscr{E}$.

3. D'après la question précédente, les solutions f de $\mathscr{E}$ sont de la forme $f(x) = x + 2 + \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$

4. $u(0) = 1$ donc $f(0) = 2 + \mathrm{C} = 1$ et par conséquent $\mathrm{C} = -1$ donc $u(x) = x + 2 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.