1 Probabilités élémentaires

1.1 L'univers

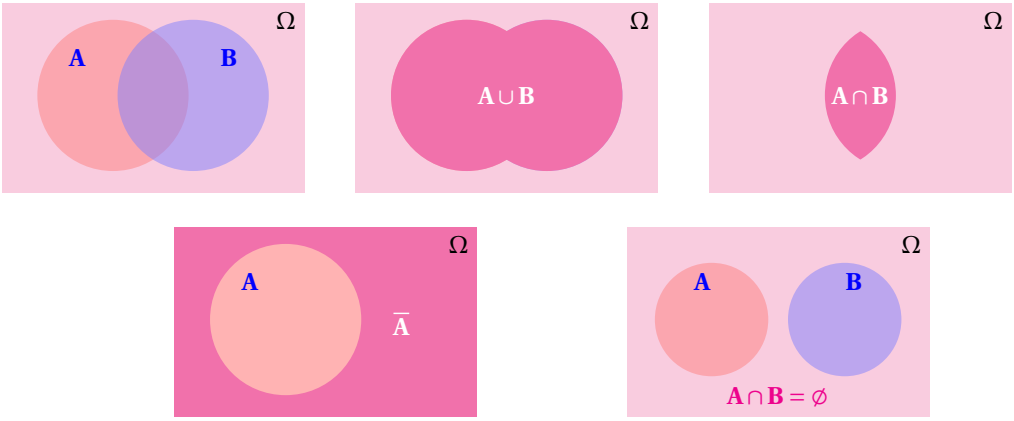
Une urne contient trois boules : une bleue, une rouge, une verte.

Le fait de tirer une boule de l'urne et noter sa couleur est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat. On dit que cette expérience est *aléatoire*.
L'ensemble des résultats possibles de cette expérience est {B,R,V}. Ces résultats sont nommés *événements élémentaires* et l'ensemble des événements élémentaires est nommé *univers* (noté généralement Ω).
Un *événement* est un ensemble de résultats élémentaires (par exemple : « obtenir B ou R»).
Cet événement est dit *certain* s'il contient tout les événements élémentaires (« ne pas obtenir une boule jaune»).
Il est dit *impossible*, et est noté $\emptyset$, s'il ne contient aucun élément élémentaire (« obtenir une boule grise»).

1.2 Les événements

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces et à relever le chiffre obtenu sur la face supérieure.
Soit A l'événement « obtenir un multiple de 3» et B l'événement « obtenir un chiffre pair».

- L'événement « A ou B», noté $A \cup B$, est l'événement constitué de tous les événements élémentaires contenus dans A ou dans B, y compris s'ils sont communs.
- l'événement « A et B», noté $A \cap B$, est l'événement constitués de tous les événements élémentaires contenus à la fois dans A et dans B.
- l'événement «non A», noté $\overline{A}$ (lire «A barre»), est l'événement *contraire* de A, il est constitué de tous les événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A.
- on dit que deux événements sont *incompatibles* s'ils n'ont aucun événement élémentaire en commun. On le note $A \cap B = \emptyset$.



1.3 Exercice

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Définir l'univers Ω.
2. écrire sous forme de parties de Ω les événements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2» ;
   - B : « obtenir un numéro impair» ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4».
3. écrire les événements $B \cup C$, $B \cap C$, $\overline{A}$ et $\overline{A} \cup C$.
4. Citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraires l'un de l'autre.

2 Loi de probabilité

On suppose à partir de maintenant que l'univers Ω est un ensemble fini.

2.1 Modélisation par la loi des grands nombres

On lance un dé à 6 faces et on relève le numéro obtenu sur sa face supérieure. On a

$$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}\,.$$

Supposons que, lors d'un grand nombre de tirages, on obtient les résultats suivants :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0,0606	0,1522	0,1710	0,1685	0,1936	0,2541

La somme des fréquences est bien-entendu égale à 1.
Au seul regard des fréquences relevées, le dé paraît déséquilibré, les fréquences n'étant pas approximativement égales entre elles.
On peut *modéliser* cette expérience aléatoire en associant à chaque événement élémentaire x_i un nombre p_i positif représentant au mieux leur chance de réalisation : on dira par exemple que la probabilité d'obtenir 1 est 0,0606. On a ainsi défini une *loi de probabilité* sur Ω.
Compte-tenu des variations de fréquences liées au tirage (la fluctuation d'échantillonnage vue en seconde), on peut aussi arrondir ces fréquences (tous nos chiffres sont-ils réellement porteurs d'information ?) et définir une loi de probabilité du dé sur Ω :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,06	0,15	0,17	0,17	0,19	0,26

La somme des probabilités est encore égale à 1.
Cette loi de probabilité sera considérée comme crédible si les fréquences f_i (obtenues par l'expérience renouvelée) se rapprochent de p_i lorsque le nombre de tirages devient grand. C'est la validation du modèle par *la loi des grands nombres*.

2.2 Loi équirépartie

Dans le cas où l'on définie une loi de probabilité où chaque événement élémentaire à la même probabilité, on parle de loi *equirépartie*. Par exemple, lors du lancer de dé, chaque numéro a autant de chances qu'un autre d'apparaître.

2.3 Exercices

Exercice ***(Introduction à un tableau à deux entrées)***
Pour choisir la nouvelle couleur de la peinture de sa chambre, Asma décide de s'en remettre au hasard. Elle lance deux dés tétraédriques équilibrés. Chaque dé a 3 faces de couleur bleue et une face de couleur jaune. La couleur choisie pour la peinture est celle obtenue en mélangant les deux couleurs indiquées par les dés.

1. Quel est l'univers de cet expérience aléatoire ?
2. Déterminer la loi de probabilité de l'univers Ω.

Exercice
On lance deux pièces équilibrées et on relève le nombre de piles obtenus.

1. Quel est l'univers de cet expérience aléatoire ?
2. Déterminer la loi de probabilité de l'univers Ω.

Exercice ***(Introduction à un arbre probabiliste)***
On lance trois pièces équilibrées et on relève le nombre de faces obtenue.

1. Quel est l'univers de cet expérience aléatoire ?
2. Déterminer la loi de probabilité de l'univers Ω.

3 Paramètres d'une loi de probabilité

3.1 Les paramètres

Soit Ω un univers, dont tous les événements élémentaires sont des nombres réels, sur lequel on définit la loi de probabilité suivante :

événement	e_1	e_2	$\cdots$	e_n
Probabilité	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Définition — *l'espérance*

L'*espérance* de cette loi est le réel μ (la lettre «mu») défini par

$$\mu = p_1 e_1 + p_2 e_2 + \cdots + p_n e_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i e_i \,.$$

Remarque
L'espérance d'une loi de probabilité est la *valeur moyenne* des éventualités élémentaires e_i pondérées par leur probabilité (la moyenne est un barycentre). μ est un *paramètre de position*, il correspond à la moyenne statistique $\overline{x}$.

Définition — *la variance*

La *variance* de cette loi est le réel V défini par

$$\mathrm{V} = p_1(e_1-\mu)^2 + p_2(e_2-\mu)^2 + \cdots + p_n(e_n-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(e_i-\mu)^2 \,.$$

Définition — *l'écart-type*

L'*écart-type* de cette loi est le réel σ (la lettre «sigma») défini par

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}} \,.$$

Remarque
L'écart-type d'une loi de probabilité exprime l'écart moyen des issues par rapport à leur valeur moyenne. σ est un *paramètre de dispersion*, il correspond à l'écart type statistique s (ou aussi σ).

3.2 Exercices

Exercice
Lors d'une tombola les gains possibles sont 0 €, 10 €, 20 € et 100 € avec les probabilités respectives 0,4 ; 0,3 ; 0,25 et 0,05.

1. Calculer l'espérance mathématique du gain.
2. En donner une interprétation.

Exercice
Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés *équilibrés* à 6 faces, l'un rouge l'autre vert. On note la somme obtenue.

1. Déterminer la loi de probabilité de l'univers Ω.
2. Calculer E, V et σ.

4 Probabilité d'un événement

4.0.1 Cas général

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.

Pour tout événement A de Ω, la *probabilité de l'événement* A est le réel, noté $p(\mathrm{A})$, tel que :
- $p(\mathrm{A}) \in [0,1]$;
- si $\mathrm{A} = \emptyset$ alors $p(\mathrm{A}) = p(\emptyset) = 0$;
- si $\mathrm{A} \neq \emptyset$ alors $p(\mathrm{A})$ est la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

4.1 Propriétés

Propriété

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.

1. $0 \leqslant p(\mathrm{A}) \leqslant 1$.
2. si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors $p(\mathrm{A}) \leqslant p(\mathrm{B})$

Théorème *Admis*

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.

$$p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

Exercice
On considère un jeu de 32 cartes. On tire, au hasard une carte de ce jeu.

1. Déterminer la probabilité de l'événement T : « obtenir un trèfle ».
2. Déterminer la probabilité de l'événement F : « obtenir une figure ».
3. Déterminer la probabilité de l'événement $\mathrm{F} \cap \mathrm{T}$ et en donner une interprétation.
4. En déduire la probabilité de l'événement $\mathrm{F} \cup \mathrm{T}$ et en donner une interprétation.

Théorème

Soit A un événement d'un univers Ω.

$$p\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - p(\mathrm{A}).$$

Exercice
Une urne contient 3 boules bleues, 5 boules rouges et 2 boules vertes. On tire au hasard une boule dans cette urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivant :
A :« la boule est verte » ;
B :« la boule est rouge ou bleue ».

4.2 Cas d'équiprobabilité

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité *équirépartie*.

Pour tout événement A de Ω,

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'événements élémentaires de A}}{\text{nombre d'événements élémentaires de } \Omega}.$$

Exercice
Une urne contient deux boules rouges R_1, R_2 et trois boules jaunes J_1, J_2 et J_3, toutes indiscernables au toucher. On tire deux boules successivement avec remise (la première boule est remise dans l'urne) et on note leur couleur.

1. Déterminer le nombre d'événements élémentaires de cette expérience.
2. Calculer les probabilités suivantes :
   A : « on a tiré deux boules rouges » ;
   B : « on a tiré deux boules jaunes » ;
   C : « on a tiré deux boules de même couleur » ;
   D : « on a tiré au moins une boule rouge ».
3. Le tirage s'effectue maintenant sans remise (la première boule n'est pas remise dans l'urne). Reprendre les questions précédentes.

5 Variable aléatoire

5.1 Un exemple

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés *équilibrés* à 6 faces, l'un rouge l'autre vert. On note X la somme obtenue.
X est alors une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit alors que X est une *variable aléatoire*.
L'événement « la somme est égale à 6» est notée $(X = 6)$ et sa probabilité $p(X = 6)$.
La loi de probabilité de X sera alors :

s	2	3	$\cdots$	11	12
$p(X = s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\cdots$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

L'*espérance* de X, notée E(X), la *variance* de X, notée V(X) et l'*écart-type* de X, notée $\sigma(X)$, sont respectivement l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

5.2 Exercice

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On définit une variable aléatoire X en associant à chaque tirage le nombre :
- (-10) si on tire le numéro 1 ;
- 10 si on tire le numéro 6 ;
- 0 sinon.

1. Définir l'ensemble des éventualités Ω et donner l'ensemble $X(\Omega)$.
2. On suppose que le dé est parfaitement équilibré. Donner la loi de probabilité de X. et son espérance E(X).
3. On suppose que le dé est truqué et que les probabilités d'apparition des numéros 1, 2, 3, 4 et 5 sont toutes égales à 0,12. Donner la loi de probabilité de X et son espérance.

6 Exercices

Exercice
Une urne contient une boule bleue B et deux boules rouges R_1, R_2 toutes indiscernables au toucher.
On réalise l'expérience suivante :
– on tire une première boule. Si elle est rouge, on la garde, si elle est bleue, on la remet dans l'urne.
– on tire une deuxième boule. Si elle est rouge, on la garde, si elle est bleue, on la remet dans l'urne.
On note R_1 l'événement « la première boule est rouge »et R_2 l'événement « la deuxième boule est rouge ».

1. Dresser un arbre et donner tous les résultats élémentaires de cette expérience.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
3. Déterminer la probabilité que la deuxième boule soit rouge sachant que l'on a obtenu une boule rouge au premier tirage.

Exercice
On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune 2 boules indiscernables. Dans U_1 une boule est marquée G, l'autre est marquée A ; dans U_2 une boule est marquée 3, l'autre est marquée 5 ; dans U_3 une boule est marquée $\frac{1}{2}$, l'autre est marquée 2.

Une épreuve E consiste à tirer au hasard une boule dans chaque urne.

On définit une suite (u) de la façon suivante : si la boule tirée dans U_1 est marquée A, la suite est arithmétique, si elle est marquée G, la suite est géométrique ; la boule tirée dans U_2 désigne le premier terme u_0 et la boule tirée dans U_3 désigne la raison.

1. Dresser un arbre représentant cette expérience.
2. Calculer la probabilité d'avoir :
   (a) une suite (u) arithmétique ;
   (b) une suite (u) convergente ;
   (c) une suite (u) telle que u_4 soit un nombre entier pair.
3. Calculer la probabilité d'avoir une suite (u) qui ne soit pas convergente sachant qu'elle est géométrique.

Exercice
Un jeu consiste à lancer deux dés parfaits. Un joueur mise 1€ sur le numéro 5.
Si ce numéro est obtenu sur chacun des deux dés, il reçoit 4€ ; s'il n'apparaît que sur un seul des dés, il reçoit 3€ ; dans tous les autres cas, il perd sa mise.
Le gain du joueur est la somme reçue diminuée de la mise : c'est une variable aléatoire X.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) et en donner une interprétation.

Exercice
Dix chevaux participent à une course. On s'intéresse au trois premiers (tiercés).

1. Justifier que le nombre de tiercés possible est donné par $10 \times 9 \times 8$.
2. Un joueur paie 5€ pour jouer. S'il a le bon tiercé, il gagne 2 000€ sinon il perd sa mise. Quelle est l'espérance de son gain ? En donner une interprétation.