Introduction

On considère la fonction affine f définie par $x \mapsto 0{,}5\,x + 1$

Soit Δ la droite représentant f dans un repère orthonormal d'unités mesurant 2 cm, A et B deux points de Δ.

1. On suppose que $x_A = 1$ et $x_B = 3$. Représenter la situation. Hachurer puis évaluer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ borné par l'axe des abscisses, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
2. On suppose maintenant que $a = x_A$ et $b = x_B$ sont quelconques. Évaluer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ en fonction de a et b.
3. Montrer que $\mathscr{A}$ défini précédemment peut s'écrire $g(b) - g(a)$ où g est une fonction que l'on déterminera.
4. Quel est le lien entre la fonction g et la fonction f ?
5. Soit maintenant h la fonction définie par $h(x) = g(x) + k$ où $k \in \mathbf{R}$. Montrer que h possède la même propriété que g remarquée dans la question précédente.
6. Soit M d'abscisse x un point quelconque de Δ, calculer $\Phi(x) = g(x) - g(a)$. Que vaut $\Phi(a)$? Peut-on déterminer sans calcul la valeur de $\Psi(a)$ où $\Psi(x) = h(x) - h(a)$?

1 et 2 p 245

Définition

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
• La fonction F est une *primitive de* f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée f.
• Pour tout réel x de I, on a $F'(x) = f(x)$.

1 page 273, 6 page 274

Exercice

Montrer que la fonction $F(x) = \frac{1}{2}\,e^{2x}$ est une primitive de la fonction $f(x) = e^{2x}$

Règles opératoires

Théorème — *Existence*

Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors f admet des primitives sur l'intervalle I.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive sur l'intervalle I de la fonction $u'\,e^u$ est la fonction e^u.

9 à 15 page 274

Propriété — *Tableau des dérivées*

Nous le lirons de droite à gauche, avec par exemple :

fonction	dérivée
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$e^{u(x)}$	$u(x)'\,e^{u(x)}$

– une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$
– une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ est $x \mapsto \sin(x)$
– une primitive de $x \mapsto u(x)'\,e^{u(x)}$ est $x \mapsto e^{u(x)}$

page 94

Existence et unicité

Propriété

Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I alors :
- toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
- pour tout couple $(x_0 \ ; \ y_0)$, avec $x_0 \in I$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant $G(x_0) = y_0$.

4 et 5 page 273

Démonstration
- F étant donné, posons $G(x) = F(x) + k$ alors $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ donc G est bien une primitive de f.
- Supposons que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et que G et F sont deux primitives distinctes. Il existe par conséquent un nombre réel k non nul tel que pour tout x : $G(x) = F(x) + k$.
  Mais alors $G(x_0) = F(x_0) + k$ ou encore $y_0 = y_0 + k$ donc $k = 0$. Contradiction. Notre hypothèse que F et G sont deux primitives distinctes est à rejeter.

Aires et intégrales

Définition

Dans un repère orthonormé du plan, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ borné par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$\mathscr{A} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

le dernier membre de l'égalité se lisant : *intégrale de a jusqu'à b de f-de-x-d-x.*

Exercice

Dans un repère orthonormé d'unités mesurant 2 cm, calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ borné par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction $f \ : \ x \mapsto x^2 + 1$, l'axe des ordonnées et la droite $x = 1$.

Solution

Nous devons calculer : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 x^2 + 1\mathrm{d}x$.

Nous cherchons une primitive de f : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$.

Donc $\mathscr{A} = F(1) - F(0) = \frac{4}{3}$ u.a. soit $\mathscr{A} = \frac{16}{3}$ cm^2 car l'unité d'aire vaut : $2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}^2$.

5 page 245, 9 page 246, 25 et 27 page 247

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive quelconque de f et $a \in I$. La fonction Φ définie sur I par

$$\Phi(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exercice

Reprendre le fonction F de l'exercice précédent et vérifier le théorème.