1 Limite au voisinage de $+\infty$

Définition — *Limite finie en $+\infty$*

Soit l un réel. Dire que $f(x)$ a pour limite l au voisinage de $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

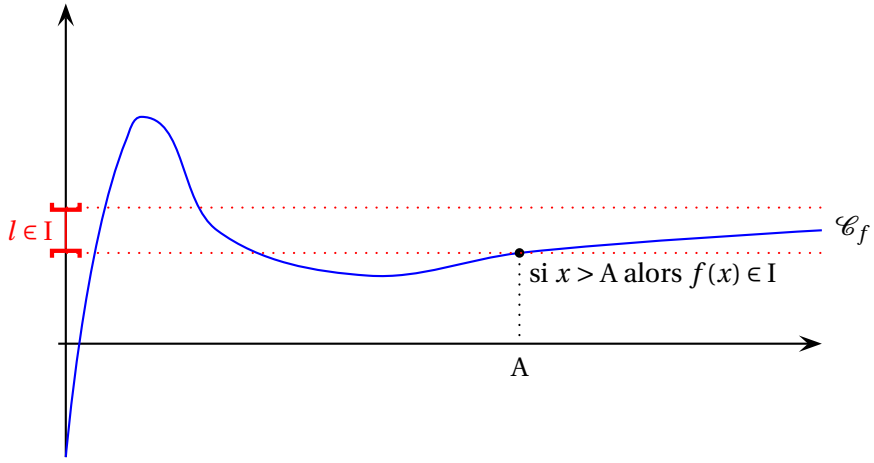

FIGURE 1 – $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Propriété — *Interprétation graphique*

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ avec l réel alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exemple

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (la droite est toujours en dessous de la courbe sur $[0; +\infty[$) ;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (la droite est toujours au dessus de la courbe sur $[0; +\infty[$) ;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (la courbe coupe la droite en une infinité de points).

Définition — *Limite infinie en $+\infty$*

Dire que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ (resp $-\infty$) au voisinage de $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;-A[$) contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

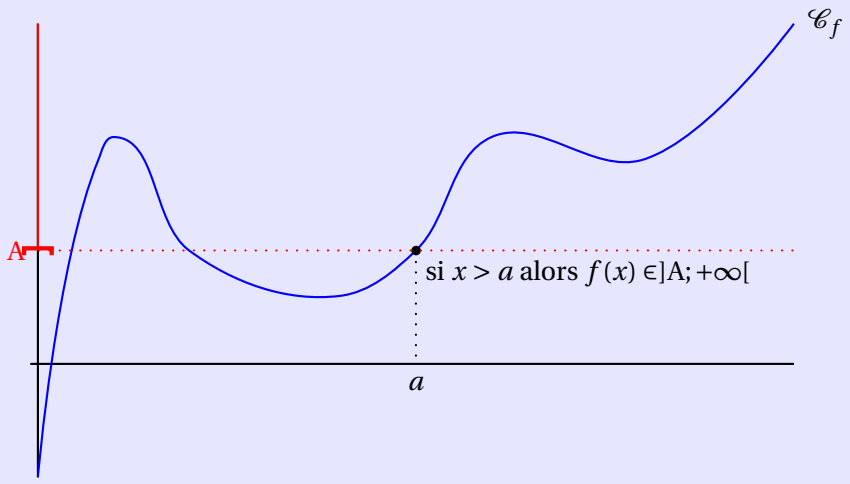

FIGURE 2 – $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Propriété — *Interprétation graphique*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$. S'il existe deux réels a et b tels que $f(x)-(ax+b) = g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors la droite Δ d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exemple

La courbe de $f : x \mapsto x+2+\frac{1}{x^2}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x+2$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

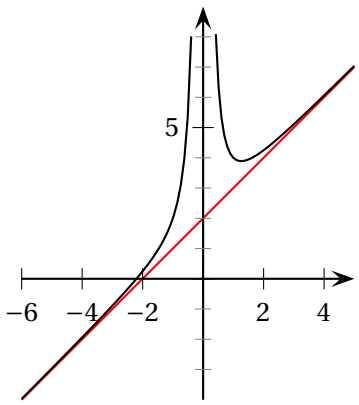

FIGURE 3 – Asymptote oblique

Propriété

La limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est égale à la limite en $\pm\infty$ de son monôme de plus haut degré.

Propriété

La limite d'une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) en $\pm\infty$ est égale à la limite en $\pm\infty$ du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

TD1
TD4
n14p52
35p55

2 Limite au voisinage d'un réel a

Définition — *Limite infinie en a*

Dire que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) au voisinage de a signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;-A[$) contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.

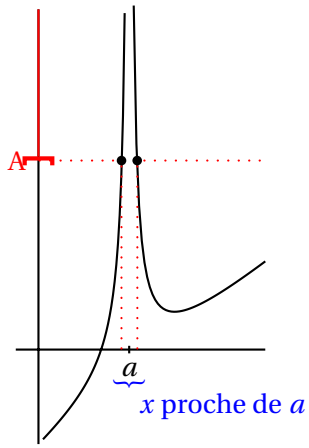

FIGURE 4 – $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Propriété — *Interprétation graphique*

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

Définition — *Limite finie en a*

Soit l un réel. Dire que $f(x)$ a pour limite l au voisinage de a signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-0}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \\
&= \cos(0) \quad \text{par définition du nombre dérivé} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

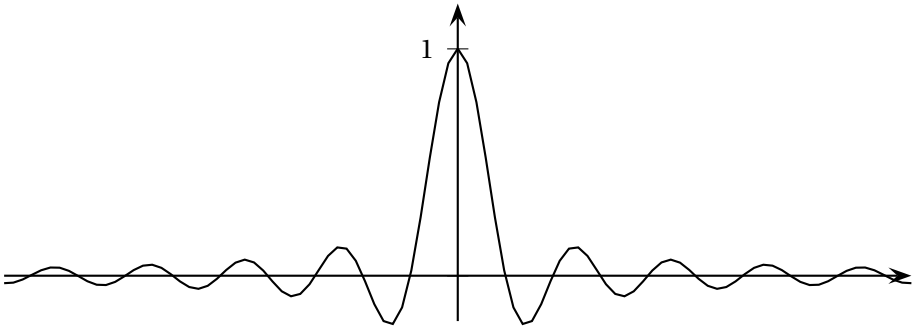

FIGURE 5 – $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

19p53
TD3
18p52

3 Limites et ordre

Propriété — *Compatibilité avec l'ordre*

Soit a un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$.
Si $f(x) < g(x)$ alors $l \leqslant l'$.

Théorème — *Théorème des gendarmes*

Soit trois fonctions f, g et h telles que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de a (réel ou $\pm\infty$).
Si les fonctions f et h ont la même *limite finie* l au voisinage de a, alors g a pour limite l au voisinage de a.

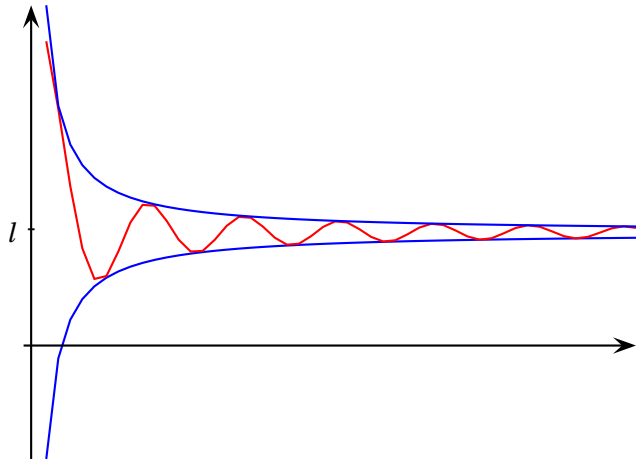

FIGURE 6 – Théorème des gendarmes

Démonstration ***(À connaître)***
On démontre ce théorème dans le cas particulier de $+\infty$.

Soit I un intervalle ouvert contenant l, on doit montrer que I contient tous les réels $g(x)$ pour x assez grand. Par hypothèse,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ donc I contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand, plus précisément, il existe un réel A tel que si $x > \mathrm{A}$ alors $f(x) \in \mathrm{I}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ donc I contient tous les réels $h(x)$ pour x assez grand, plus précisément, il existe un réel B tel que si $x > \mathrm{B}$ alors $h(x) \in \mathrm{I}$.

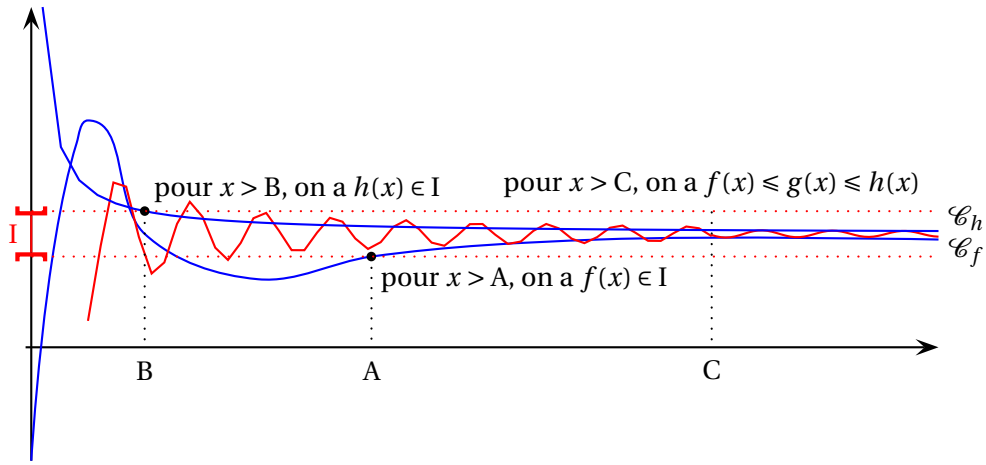

FIGURE 7 – Démonstration du théorème des gendarmes

Posons $\mathrm{N} = \max(\mathrm{A};\mathrm{B})$ alors pour $x > \mathrm{N}$, on a $f(x) \in \mathrm{I}$ et $h(x) \in \mathrm{I}$.

Dire que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de $+\infty$, signifie qu'il existe un réel C tel que pour $x > \mathrm{C}$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Posons $\mathrm{M} = \max(\mathrm{N};\mathrm{C})$ alors pour $x > \mathrm{M}$, on a $f(x) \in \mathrm{I}$, $h(x) \in \mathrm{I}$ et $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
On en déduit que pour $x > \mathrm{M}$, on a $g(x) \in \mathrm{I}$; c.-à-d. que I contient les réels $g(x)$ pour x assez grand.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Pour tout $x > 0$, on a $-x \leqslant f(x) \leqslant x$.
Comme $\lim\limits_{x\to0^+} x = \lim\limits_{x\to0^+} (-x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$.
De même pour $x < 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

Corollaire — *Corollaire du théorème des gendarmes*

Soit deux fonctions f et g telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a (réel ou $\pm\infty$),
• si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$;
• si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

32p54
24p53