FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ DEUX

Table des matières

1 Définitions

Définition

On appelle fonction *polynôme du second degré* toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels appelés coefficients avec $a \neq 0$.

Exercice

Du second degré ou pas ?!

fonctions polynôme de degré 2	les coefficients	Et celles là ?
$\mathrm{P}(x) = 2x^2 - 5x + 3$	$a = 2,\ b = -5,\ c = 3$	$\mathrm{P}(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$
$\mathrm{P}(x) = -x^2 + 3$	$a = -1,\ b = 0,\ c = 3$	$\mathrm{P}(x) = x - 5$
$\mathrm{P}(x) = -7x^2 + 3x$	$a = -7,\ b = 3,\ c = 0$	$f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$

Les parties en bleu ne sont pas exigibles en seconde.

Définition

Une expression de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$ s'appelle la *forme canonique* d'un polynôme de degré 2.
Toute fonction polynôme admet une forme canonique.

Exercice

Montrer que $\mathrm{P}(x) = 2(x-1)^2 + 3$ est égal à $\mathrm{Q}(x) = 2x^2 - 4x + 5$ (sa forme canonique).

➔ En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x) &= 2(x-1)^2 + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 5 = \mathrm{Q}(x) \end{aligned}$$

2 Variations et représentation graphique

Propriété

La fonction polynôme de degré 2 est définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ et elle est :

- strictement décroissante puis strictement croissante **si** $a>0$,
- strictement croissante puis strictement décroissante **si** $a<0$,

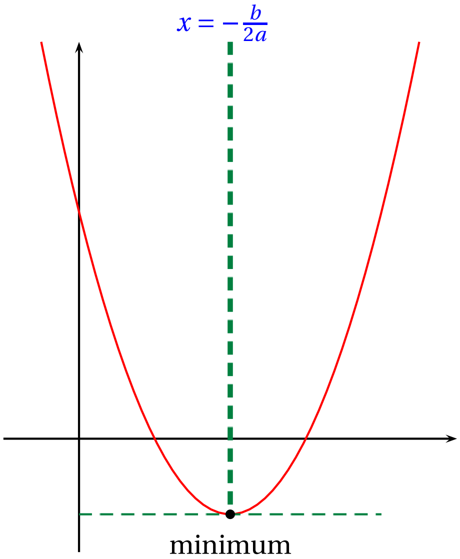
Tableau de variations et représentation graphique :

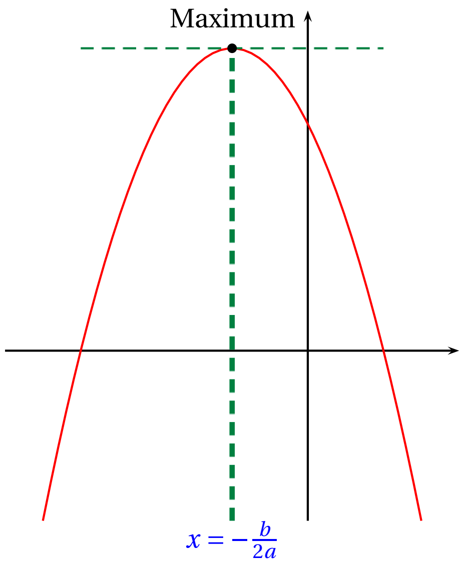
$a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	min	↗ $+\infty$

$a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	Max	↘ $-\infty$





Propriété

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une *parabole*.
Toute parabole admet un *axe de symétrie* parallèle à l'axe des ordonnées.

3 Méthodes pratiques pour déterminer les variations de P

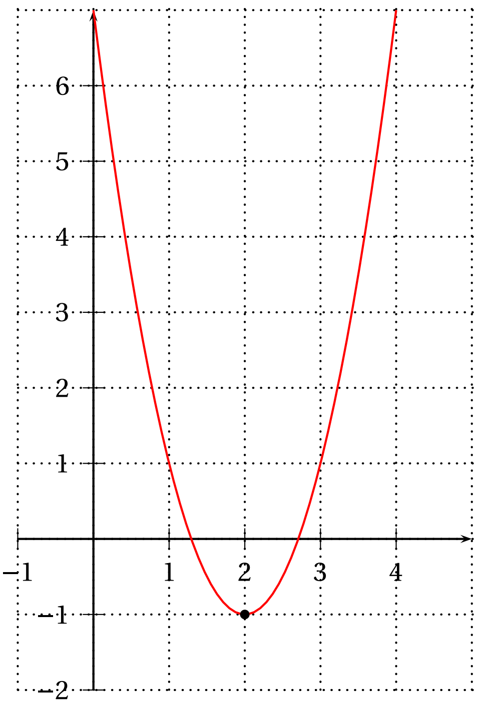
– **La forme canonique est donnée :** $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Si $a > 0$, alors $a(x-\alpha)^2 \geqslant 0$
donc, $a(x-\alpha)^2 + \beta \geqslant \beta$

le minimum β est atteint lorsque $a(x-\alpha)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Exercice
Soit $\mathrm{P}(x) = 2(x-2)^2 - 1$,
P est décroissante sur $]-\infty\,;\,2\,]$,
puis croissante sur $[\,2\ +\infty\,[$,
son minimum est atteint
en $x = 2$ et il vaut $y = -1$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

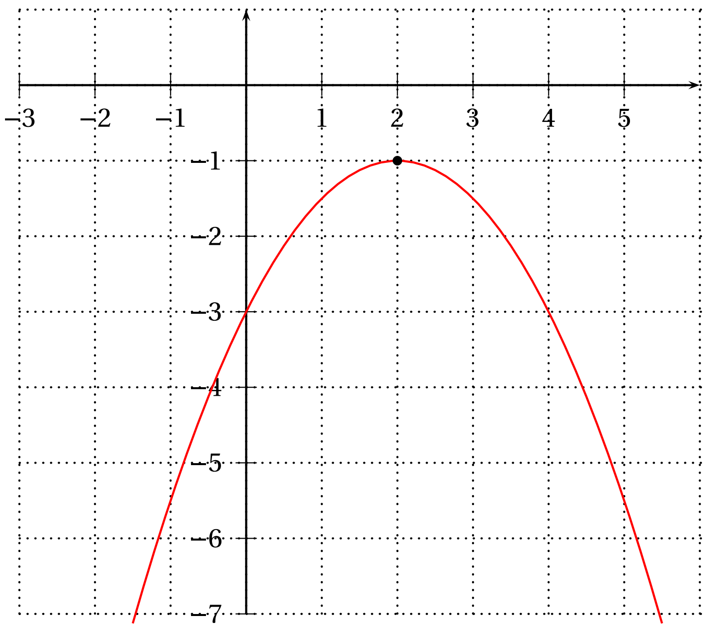


Si $a < 0$, alors $a(x-\alpha)^2 \leqslant 0$
donc, $a(x-\alpha)^2 + \beta \leqslant \beta$

le Maximum β est atteint lorsque $a(x-\alpha)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Exercice
Soit $\mathrm{P}(x) = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 - 1$,
P est croissante sur $]-\infty\,;\,2\,]$,
puis décroissante sur $[\,2\ +\infty\,[$,
le Maximum est atteint
en $x = 2$ et il vaut $y - 1$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$

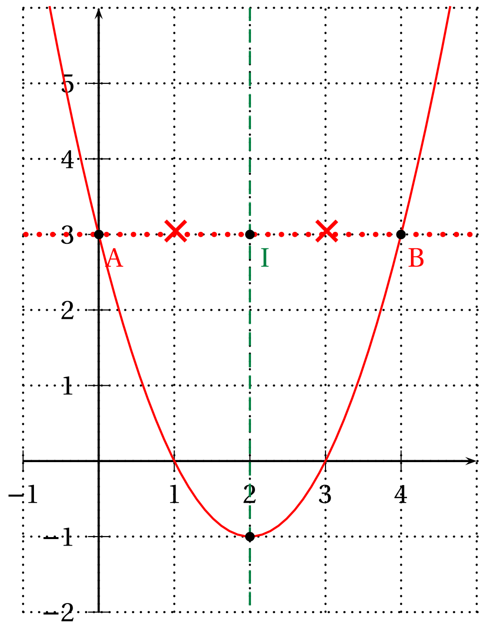


– **Utilisation de la propriété de symétrie de la courbe.**
Puisque la courbe est symétrique, si l'on trouve deux points A et B de cette courbe ayant une même ordonnée (sur le graphique ou sur une table de valeurs), on en déduit que leur milieu I est situé sur l'axe de symétrie.
L'abscisse de I est l'abscisse de l'extremum, il suffit de calculer l'ordonnée.

Exercice
Soit $P(x) = x^2 - 4x + 3$:
On recherche par exemple les 2 points A et B qui ont pour abscisse $y = 3$.
Pour cela, on résout $P(x) = 3$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 = 3 &\iff x^2 - 4x = 0 \\ &\iff x(x-4) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

L'abscisse du minimum est donc $x = \dfrac{0+4}{2} = 2$
L'ordonnée vaut
$P(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$.
P est décroissante sur $]-\infty\,;\,2\,]$, croissante sur $[\,2\;+\infty\,[$.



– Utilisation de $x = -\dfrac{b}{2a}$.
Exercice
Soit $P(x) = -x^2 - 2x + 3$
$a = -1$ est négatif et $b = -2$ donc, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2 \times (-1)} = -1$.
La fonction P est donc croissante sur $]-\infty\,;\,-1\,]$ et décroissante sur $[-1\;+\infty\,[$.
Son maximum est atteint pour $x - 1$ et vaut $P(-1) = 4$.