α βγδεηθφ

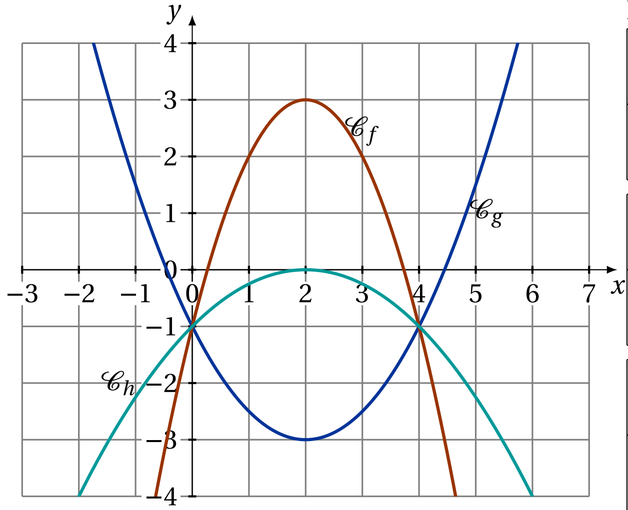
# Devoir surveillé (50 min)

χλμνπρσ ω

NOM : Prénom :

**Lecture de courbes** ***6 points***

On a représenté les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois polynômes du second degré. Associer à chaque courbe l'expression développée, l'expression factorisée, la forme canonique et le tableau de signes.




Les tableaux de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{6}$ | | $2+\sqrt{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $H(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |

Les expressions développées :

a : $\dfrac{1}{2}x^2-2x-1$

b : $-\dfrac{1}{4}x^2+x-1$

c : $-x^2+4x-1$

Les expressions factorisées :

A : $-\left(x-2-\sqrt{3}\right)\left(x-2+\sqrt{3}\right)$

B : $\dfrac{1}{2}\left(x-2-\sqrt{6}\right)\left(x-2+\sqrt{6}\right)$

C : $-\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2$

Les formes canoniques :

I : $\dfrac{1}{2}(x-2)^2-3$

II : $-\dfrac{1}{4}(x-2)^2$

III : $-(x-2)^2+3$

**Le tableau des réponses**

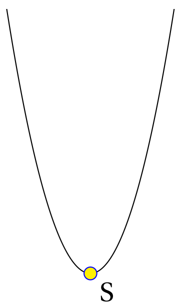
| Courbe | abc | ABC | I-II-III | FGH |
|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{C}_f$ | | | | |
| $\mathscr{C}_g$ | | | | |
| $\mathscr{C}_h$ | | | | |

**Choix de la «bonne» expression en vue d'une résolution algébrique** ***4 points***

La fonction $g$ est définie par : $x \mapsto -2(x-1)^2+8$.

1. Développer $g(x)$ sous la forme $g(x) = ax^2+bx+c$.
2. Donner le tableau de variations de $g$.
3. En utilisant la *bonne* expression, résoudre l'équation : $g(x) = 8$.
4. Avec la calculatrice (expliquer quels outils sont utilisés) résoudre l'équation $g(x) = 2$ en donnant la ou les solutions arrondies au millième.

**Restitution de connaissances** ***4 points***

<table>
<tr><th>Questions</th><th>Réponses</th></tr>
<tr><td colspan="2">Il peut y avoir plusieurs réponses exactes et la note maximum nécessite la totalité de ces réponses, toute réponse fausse diminue la note, l'absence de réponse est neutre, la note de l'exercice ne peut descendre en dessous de zéro.</td></tr>
<tr><td>1. Pour tout nombre, l'expression $3x^2+6x-9$ est égale à :</td><td>☐ $3(x-1)(x+3)$<br>☐ $(3x-3)^2$<br>☐ $3(x+1)^2-6$<br>☐ $(x-3)^2$</td></tr>
<tr><td>2. Voici un algorithme qui calcule l'image d'un nombre $x$ par une fonction $f$ :<br>– Saisir $x$ ;<br>– Calculer le triple ;<br>– Retirer 5 ;<br>– Élever le résultat au carré ;<br>– Ajouter 4 ;<br>– Afficher le résultat.<br>L'expression de $f$ est :</td><td>☐ $f(x)=3x-5^2+4$<br>☐ $f(x)=3(x-5)^2+4$<br>☐ $f(x)=(3x-5)^2+4$<br>☐ $f(x)=3(x-5^2)+4$</td></tr>
<tr><td>3. Soit la fonction $g$ définie sur $[-5\,;5]$ par :<br>$g(x)=-2(x+3)^2+4$<br>Le maximum de $g$</td><td>☐ est 3<br>☐ est 4<br>☐ est 5<br>☐ n'existe pas sur $[-5\,;5]$</td></tr>
<tr><td>4. Ci-dessous un tableau de valeurs d'une fonction du second degré, à quelle(s) expression(s) cela correspond-il ?<table><tr><td>$x$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>7</td><td>1</td><td>$-1$</td><td>1</td><td>7</td></tr></table></td><td>☐ $f(x)=2x^2-8x+7$<br>☐ $f(x)=x^2+7$<br>☐ $f(x)=2(x-2)^2-1$<br>☐ $f(x)=2x^2-2x-1$</td></tr>
<tr><td>5. Ci-dessous une parabole pour laquelle le point S(3;5) est son sommet. On a perdu les axes de coordonnées. Parmi les propositions suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) vraie(s) ?<br></td><td>☐ Le minimum de $f$ est 3<br>☐ Si $f(0)=8$ alors $f(6)=8$<br>☐ Pour tout nombre réel, $f(x)$<br>est positif<br>☐ $f$ est croissante sur $[3\,;+\infty[$</td></tr>
</table>

**Application des connaissances** ***6 points***

Une entreprise produit du papier. Pour $x$ tonnes produites par jour, le bénéfice, en centaines d'euros, s'élève à $-5x^2+300x-2500$ (c'est évidemment très fantaisiste). Considérons la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par :

$$\mathrm{B}(x) = -5x^2 + 300x - 2500$$

1. Compléter le tableau de valeurs :

| $x$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | |

2. Prouver que, pour tout nombre $x$, $\mathrm{B}(x) = -5(x-10)(x-50)$

3. Quel est le bénéfice maximal (en euros) que peut obtenir l'entreprise ? Pour combien de tonnes de papier est-il atteint ? Justifier.

4. Donner, en justifiant, le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0; 100]$.

5. Peut-on, sans calcul, déterminer quelle production entre 32 tonnes et 36 tonnes de papier apporte le plus grand bénéfice à l'entreprise ? Justifier.

6. Justifier que le tableau de signes de la fonction B est :

| $x$ | 0 | | 10 | | 50 | | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{B}(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |