1 La fonction exponentielle de base a

Définition

Soit a un réel strictement positif. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par

$$f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

f est appelée *exponentielle base a*.

Propriété

Pour $a > 0$, x et y réels, on a :
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Exercice
Résoudre $3^x = 12$.

Étude de la fonction exponentielle de base a

Propriété

Soit $a > 0$, la fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(a^x)' = a^x \ln(a)\,.$$

Propriété

Soit $a > 0$,
- si $a > 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $0 < a < 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soit $a > 0$,
- si $a > 1$ alors

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,;$$

- si $0 < a < 1$ alors

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} a^x = +0\,.$$

Exercice
Représenter à la calculatrice $x \mapsto 2^x$ puis $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Exercice

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2^x + 3^x$ (sens de variation et limites).
2. En déduire que l'équation $2^x + 3^x = 5$ admet une solution unique. Déterminer la valeur de cette solution.

2 Racine n-ième

Définition

Soit a un réel positif et $n \geqslant 2$ un entier.
L'unique réel x positif tel que $x^n = a$ est appelé racine n-ième de a et noté $\sqrt[n]{a}$ ♡

Exercice
Déterminer $\sqrt[n]{0}$, $\sqrt[n]{1}$, $\sqrt[3]{8}$ et $\sqrt[4]{25}$.

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ $\qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Définition

On appelle fonction *racine n-ième* la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \begin{cases} \text{si } x > 0 & = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(x)} \\ \text{si } x = 0 & = 0 \end{cases}$$

♡

Exercice
Établir le tableau de variations de la fonction racine n-ième.

3 Exercices

Exercice
On note (E) l'équation $2^{x^2-6x} = 128$

1. Montrer que (E) est équivalente à (F) : $x^2 - 6x - 7 = 0$
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$$

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. En déduire les variations de f.

Exercice
Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{3}{4}} = 8 \\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = 40 \end{cases}$$