Notation :
- le *cardinal* d'un ensemble fini E représente son nombre d'éléments, il est noté Card{E} ;
- soit E et F deux ensembles finis, le *produit cartésien* $E \times F$ est l'ensemble de tous les couples $(e; f)$ où $e \in E$ et $f \in F$;
- on note $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ (*lire «factorielle» n*) et par convention $0! = 1$.

1 Le principe multiplicatif

Exercice
On lance successivement un dé rouge à 6 faces numérotées de 1 à 6 puis un dé vert à 4 faces numérotées de 1 à 4. À l'aide d'un arbre (*simple*), déterminer tous les couples obtenus.

Exercice
On lance successivement un dé rouge à 6 faces numérotées de 1 à 6, un dé vert à 4 faces numérotées de 1 à 4 puis une pièce de monnaie. À l'aide d'un arbre (*simple*), déterminer tous les triplets obtenus.

Propriété — *Principe multiplicatif*

Si une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$ possibilités alors le nombre total d'issues est

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_p .$$

Propriété

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_p$ des ensembles finis. On a

$$\text{Card}\{E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p\} = \text{Card}\{E_1\} \times \text{Card}\{E_2\} \times \cdots \text{Card}\{E_p\} .$$

Exercice
Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

Exercice
Une course hippique comprend 10 chevaux. Déterminer le nombre de tiercés (arrivée de 3 chevaux classés dans l'ordre d'arrivée) possible puis le nombre de quintés (même définition) possibles.

2 Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier $p \leqslant n$.
Une *combinaison* de p éléments de E, est une p-liste $\{a_1; a_2; \ldots; a_p\}$ d'éléments deux à deux distincts.
Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté $\binom{n}{p}$.

Remarque
Une p-liste est une liste d'éléments de E (on ne tient pas compte de l'ordre). Une combinaison de p éléments est donc un sous-ensemble de E de cardinal p.

Exemple
Le tirage *simultané* de p boules dans une urne contenant n boules est une combinaison.

Propriété
Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leqslant n$.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration ***(À connaître)***
- Il n'y a qu'un ensemble à 0 élément, l'ensemble vide et un seul à n élément, E lui-même.
- Il y a exactement n ensembles à 1 élémént dans un ensemble à n éléments.
- À chaque ensemble de p éléments, on peut lui associer un unique ensemble à $n-p$ éléments (son complémentaire). Donc dénombrer le nombre d'ensembles de p éléments parmi n revient à dénombrer le nombre d'ensembles de $(n-p)$ éléments parmi n.

Théorème
Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leqslant n$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \times \binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration
Montrons que $p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}$.

Il y a deux méthodes pour choisir une partie A contenant p éléments de E, et un élément a de A :
- la première est de commencer par choisir la partie A (il y a $\binom{n}{p}$) façons), puis de choisir l'élément a dans A (p façons). D'après le principe multiplicatif, il y a donc $p \times \binom{n}{p}$ façons de choisir une partie A contenant p éléments de E, et un élément a de A.
- la deuxième est de commencer par choisir un élément a de E (n façons) puis de choisir parmi les $n-1$ éléments restants $p-1$ éléments qui, avec a constitueront l'ensemble A ($\binom{n-1}{p-1}$ façons). D'après le principe multiplicatif, il y a donc $n \times \binom{n-1}{p-1}$ façons de choisir une partie A contenant p éléments de E, et un élément a de A.

On a alors $p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}$ d'où le résultat.

Exercice
En appliquant le théorème 2 ci-dessus, montrer que $\binom{10}{4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$.

Exercice
On effectue un tirage simultané pour élire 2 délégués de classe parmi 32 élèves. Déterminer le nombre de possibilités.

Exercice
Pour gagner au loto national, il faut obtenir 7 numéros parmi les 49. Combien existe-t-il de combinaisons possible ? Quelle est la probabilité de gagner ?

Théorème
Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leqslant n$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration
Il suffit d'appliquer $p-1$ fois le théorème 2

Remarque
Pour calculer $\binom{n}{p}$:
• Calculatrice TI : n>MATHS>PRB>nPr>p
• Calculatrice Casio : n>RUN>OPTN>PROB>nCr>p

3 Le triangle de Pascal

3.1 La relation

Théorème — *La relation de* PASCAL

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leqslant n-1$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Démonstration ***(À connaître)***
Deux méthodes, l'une ensembliste, l'autre algébrique.

1. Soit E un ensemble fini à $n \geqslant 2$ éléments et a un élément de E.
   Les ensembles à p éléments de E se partagent en deux parties :
   – celles ne contenant pas a, il y en a $\binom{n-1}{p}$;
   – celles contenant a, il y en a $\binom{n-1}{p-1}$.
   Donc, il y a $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ ensembles de p éléments choisis parmi n , d'où le résultat.
2. On effectue le calcul :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \\ &= \\ &= \\ &= \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

Remarque
On démontre ainsi que pour tout n et p, le nombre $\binom{n}{p}$ est un entier par récurrence en posant pour propriété $\mathscr{P}(n)$ « pour tout $p \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\binom{n}{p}$ est un entier ».

3.2 Le triangle de Pascal

L'idée est de représenter les $\binom{n}{p}$ sous forme de tableau à double entrées : en colonne les valeurs de p, en ligne, celles de n.

	0	1	2	3	4	...	$p-1$	p	...
0									
1									
2									
3									
4									
...									
$n-1$							$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$	
n								$\binom{n}{p}$	
...									

3.3 La formule

Théorème — *La formule du binôme de* NEWTON

Pour tous complexes a et b et tout entier naturel n, on a

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^n .$$

Exemple
- pour $n=2$, $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2+2ab+b^2$
- pour $n=3, \ldots$

Démonstration
En développant le produit $(a+b)^n = (a+b)\times(a+b)\times\cdots\times(a+b)$, on obtient 2^n termes de la forme $a^{n-p}b^p$ avec $p \in [\![0\,;\,n]\!]$.
Pour obtenir b^p, il faut « choisir » p termes b parmi les n, il y a $\binom{n}{p}$ possibilités.
Le monôme en b de degré p est donc $\binom{n}{p}\times a^{n-p}b^p$, d'où le résultat.

4 Une loi discrète : la loi de Bernoulli

4.1 Les épreuves de Bernoulli

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues,
- l'une appelée *succès* de probabilité p,
- l'autre appelée *échec* de probabilité $1-p$.

Exemple
Le lancer d'une pièce équilibrée est une expérience de Bernoulli. Si le « succès » est l'obtention de pile, « l'échec » sera l'obtention de face.

4.2 La loi de Bernoulli

Définition

La loi de probabilité ci-dessous est appelée *loi de Bernoulli de paramètre p*.

issue	succès (s)	échec (e)
probabilité	p	$1-p$

Exemple

Le lancer d'une pièce équilibrée suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,5.

Exemple

On lance une fois un dé équilibré à 6 faces. On appelle succès l'événement « obtenir la face 1 ».
Cette expérience suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

4.3 Variable aléatoire

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant pour valeur 0 ou 1 telle que
- $P(X=1)=p$;
- $P(X=0)=1-p$.

On dit que X est une variable de Bernoulli de paramètre p ou que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (on le note « X suit $\mathscr{B}(p)$ »).

k	1	0
$P(x=k)$	p	$1-p$

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors :
- son espérance mathématique est $E(X)=p$;
- sa variance est $V(X)=p(1-p)$.

5 La loi binomiale

5.1 Activité

Exercice *(Activité)*

On interroge quatre élèves de manière indépendante.
Pour chaque élève, il y a deux « issues » :
- soit il fait du sport avec une probabilité de 0,6 ;
- soit il ne pratique aucun sport avec une probabilité de 0,4.

1. Dresser un arbre pondéré traduisant cette expérience.
2. En déduire la probabilité qu'exactement deux élèves fassent du sport.
3. On interroge maintenant 30 élèves. Quelle est la probabilité qu'exactement deux élèves fassent du sport ?

5.2 Le schéma de Bernoulli

Définition

Un schéma de Bernoulli est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple

On lance trois fois successivement un dé à 6 faces. On appelle succès l'événement « obtenir la face 1 ».

5.3 La loi binomiale

Définition

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves et on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès (c'est à dire qui *compte* ces succès).
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée *loi binomiale de paramètres n et p*. Cette loi est notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Alors pour tout entier k, avec $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Démonstration

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\ \tbinom{n}{k}\quad p^k\quad (1-p)^{n-k}$$

C'est le produit :
- du nombre de façons de choisir k succès parmi n épreuves ;
- de la probabilité d'avoir k succès ;
- de la probabilité d'avoir $n-k$ échecs.

5.4 Propriétés

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Alors :
- son espérance mathématique est $\mathrm{E}(\mathrm{X})=np$;
- sa variance est $\mathrm{V}(\mathrm{X})=np(1-p)$;
- son écart-type est $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{np(1-p)}$.

Exercice
Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un Q.C.M. Pour chaque question, 5 réponses sont proposées dont une seule est exacte. X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que la loi de probabilité de X est une loi binomiale.
2. Donner la loi de probabilité de X puis en déduire la probabilité d'avoir au moins 5 bonnes réponses.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.

Exercice
Les résultats approchés seront donnés sous forme décimale, arrondis à 10^{-3}.
Pour répondre aux questions on pourra s'aider d'arbres pondérés.
Un centre d'entraînement réputé se voit confier de très nombreux chevaux, juments et mâles, spécialisés en trotteurs ou en galopeurs selon leurs aptitudes. Ainsi le centre comprend 62 % de galopeurs, 30 % de juments dont 35 % font du galop.
On définit les événements suivants :
- J : « Le cheval est une jument »,
- T : « Le cheval est un trotteur ».

Un lad, chargé des soins, choisit au hasard un cheval du centre.

1. Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit un trotteur ?
2. a) Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit une jument qui fasse du galop ?
   b) Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit un mâle qui fasse du galop ?
3. Le lad a choisi un mâle. Quelle est la probabilité que ce ne soit pas un trotteur ?
4. Tôt le matin, il faut transporter quatre chevaux, du centre d'entraînement à l'hippodrome. Pour cela, un apprenti choisit les chevaux au hasard et de manière indépendante (on admettra que le nombre de chevaux hébergés dans ce centre est suffisamment grand pour pouvoir modéliser le choix des quatre chevaux par des tirages successifs avec remise).
   a) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux trotteurs parmi les quatre chevaux choisis.
   b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un galopeur parmi les quatre chevaux choisis.