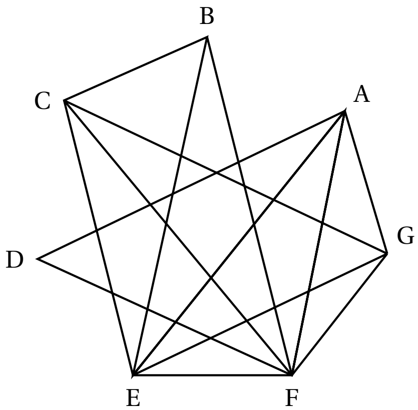
Exercice 1 **10 points**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice associée au graphe Γ.

1.



Graphe Γ

2. Le sous-graphe Γ′ constitué des sommets A, E, F et G est un quadrilatère **complet** car chaque sommet est directement relié aux trois autres. On en déduit que **le nombre chromatique** $\chi(\Gamma)$ **sera au moins égal à 4**.

3. Le sommet de plus haut degré de Γ est F qui est de degré 6. Par conséquent, d'après le cours, $4 \leqslant \chi(\Gamma) \leqslant 7$.

4. Nous appliquons le principe de coloriage du graphe Γ :

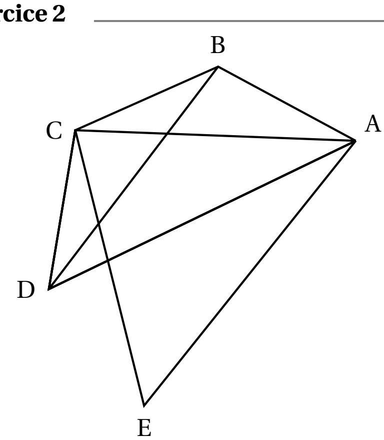
sommet	F	E	A	C	G	B	D
degré	6	5	4	4	4	3	2
couleur	1	2	3	3	4	3	2

Nous avons trouvé une solution à quatre couleurs, c'est le minimum.

5. D'après ce qui précède, il faut autant de parties du spectacle que de couleurs. Donc :

- Robert Fripe ;
- Jimi Endisque et Bob Ditlâne ;
- Luther Allison, Phil Colline et John Biaise ;
- Rory Garaguerre.

Exercice 2 **10 points**



Graphe 𝒢

1.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ce graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets D et E ne sont pas reliées. Il est connexe car il est possible de trouver un chemin menant d'un sommet quelconque à une autre sommet quelconque.

3. Nous appliquons le principe de coloriage du graphe Γ :

sommet	A	C	B	D	E
degré	4	4	3	3	2
couleur	1	2	3	4	3

Nous avons trouvé une solution à quatre couleurs. Comme le sous-graphe A, B, C et D est complet, c'est le nombre chromatique de $\mathscr{G}$.

4. Par exemple, à l'intersection de la première ligne et de la première colonne, nous obtenons :
$0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 4$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Il y a 2 chaînes de longueur 2 entre A et B : ABD et ACB ; il y a 3 chaînes de longueur 2 entre C et A : CDA, CBA et CEA.

6. $M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 9 & 7 \\ 9 & 6 & 9 & 7 & 4 \\ 9 & 9 & 8 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 9 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Sur M^3 nous lisons qu'il y a 7 chaînes de longueur 3 entre B et D (intersection ligne B et colonne D).