B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

Lycée JEAN ZAY

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES. – COEFFICIENT : 5 (7 POUR LES SPÉCIALISTES)

Ce sujet comporte 4 pages dont celle-ci

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les cinq exercices. Pour l'exercice 1, il choisira selon sa spécialité l'exercice d'enseignement obligatoire ou de spécialité mathématique.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points) **enseignement obligatoire**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse. *Une réponse exacte rapporte un demi point alors qu'une réponse fausse en retire un quart. L'absence de réponse est neutre. Si le total des points de l'exercice est négatif, il lui est attribué la note zéro.*

Lors d'une enquête, on a relevé la pointure des chaussures d'un groupe d'élèves de seconde. Voici la série obtenue :

Pointure	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Effectif	1	8	9	37	38	21	14	15	22	8	9	3	1

1) Le nombre de pointures dont la fréquence est supérieure à 0,1 est :

❒ 4 ❒ 5 ❒ 6

2) La médiane de cette série est :

❒ 14 ❒ 39,5 ❒ 41

3) Le troisième quartile de cette série est :

❒ 8 ❒ 42 ❒ 44

4) Le neuvième décile de cette série est :

❒ 12 ❒ 44 ❒ 46

5) Pour cette série, on peut écrire :

❒ $d_1 < Q_1$ ❒ $d_1 = Q_1$ ❒ $d_1 > Q_1$

6) Arrondie au dixième, la moyenne m de cette série est :

❒ 14,3 ❒ 40,2 ❒ 41

7) Arrondi au centième, l'écart-type s est :

❒ 2,53 ❒ 2,54 ❒ 12

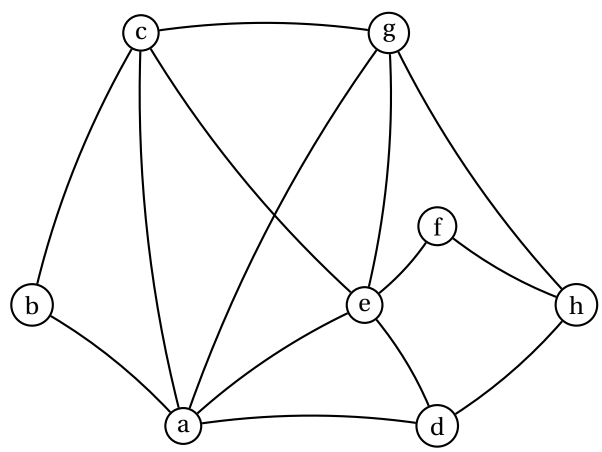
8) Le pourcentage de valeurs relevées strictement comprises dans $[m-2s\,;\,m+2s]$ (l'intervalle de normalité) est :

❒ 92,3 % ❒ 96,2 % ❒ 97,3 %

Exercice 1 (4 points) **enseignement de spécialité**

On note G le graphe représenté ci-contre et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée ci-dessous.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$



Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.
2. Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.
3. Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.
4. Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.
5. Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.
6. il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet e à chacun des huit sommets du graphe.

Exercice 2 (4 points) **tous**

Lors d'une enquête sur les logements réalisée auprès de familles d'une région, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et 5 % occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit ».) De plus, toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille. 60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.
On interroge au hasard une famille de la région.

- A désigne l'événement : « la famille habite un appartement » ;
- G désigne l'événement : « la famille est occupant à titre gratuit » ;
- L désigne l'événement : « la famille est locataire » ;
- P désigne l'événement : « la famille est propriétaire ».

1. a) Citer dans l'énoncé les propositions précises indiquant la valeur de chacune des probabilités suivantes : $p_P(\overline{A})$, $p_L(A)$ et $p_G(\overline{A})$.

b) Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2. Calculer la probabilité de l'événement : « la famille est propriétaire et habite un appartement ».

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,585

4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité pour qu'elle en soit propriétaire.

Exercice 3 (5 points) **tous**

La fonction f est définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par : $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$

1. En admettant que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
On remarquera que f peut être factorisée : $f(x) = x\left[-2 + \dfrac{5}{x} + 3\,\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right]$

2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. On rappelle que la dérivée d'une fonction de la forme $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$.

3. Dresser le tableau de variation f en précisant la valeur du maximum de f.

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ et les asymptotes éventuelles dans un plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

5. Montrer qu'il existe exactement un réel α dans I tel que $f(\alpha) = 0$.

6. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième de α.

7. À partir des questions précédentes, établir le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 4 (4 points) **tous**

Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour. Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par $f(q)$ où q désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers) et f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -2x+5+3\ln(x+1)$. On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total $C_T(q)$, ce dernier exprimé en milliers d'euros. Le coût moyen unitaire est donné par $CM(q) = \dfrac{C_T(q)}{q}$. Soit G la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$G(x) = 3(x+1)\ln(x+1) - x^2 + 2x$$

1. Calculer le coût marginal, en euros, du 1 000^{e} ouvrage.

2. Montrer que G est une primitive de f. On rappelle que la dérivée d'une fonction de la forme $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^5 f(q)\,dq$.

4. En déduire le coût total en euros de fabrication de 5 000 ouvrages.

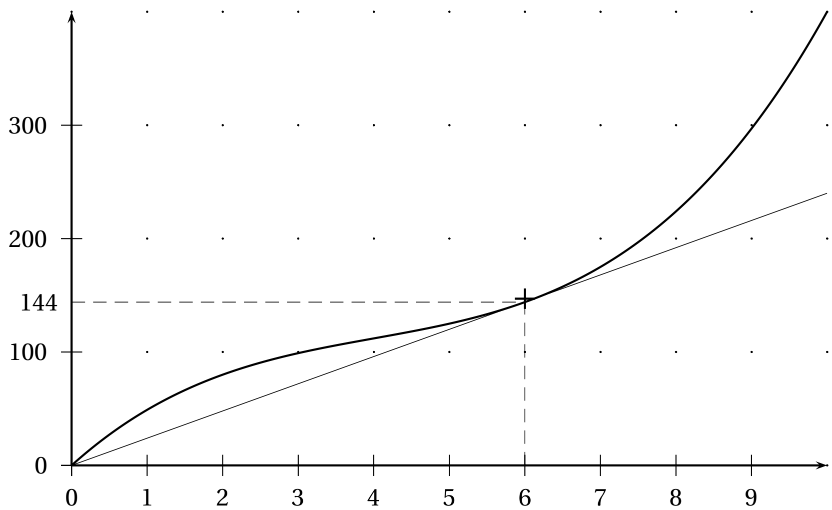
5. Que vaut le coût moyen unitaire, en euros, pour un tirage de 5 000 ouvrages.

Exercice 5 (3 points) **tous**

Une industrie pharmaceutique possède une machine capable de produire au maximum 10 litres par jour d'un certain médicament présenté sous forme de sirop.

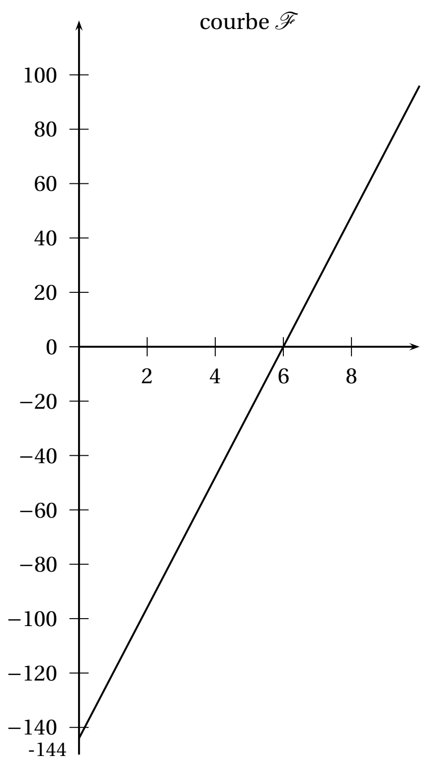
On note q la quantité produite (en litres) et $\mathrm{C}(q)$ le coût total (en euros) pour produire q litres.

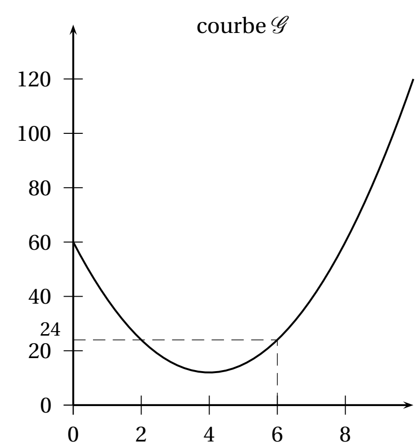
La courbe ci-dessous représente le coût total en fonction de la quantité produite. On notera que la tangente à la courbe au point d'abscisse 6 passe par l'origine.

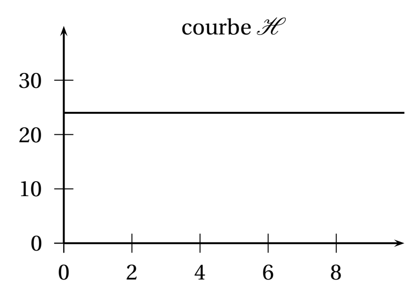


1. Le coût marginal noté C_m est défini comme la dérivée du coût total : $\mathrm{C}_m = \mathrm{C}'$. Déterminer $\mathrm{C}_m(6)$.

2. Parmi les trois courbes représentées ci-dessous, une représente le coût marginal associé à la production du médicament. Laquelle ? *Justifier que les deux autres ne conviennent pas.*







3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$\mathscr{A} = \int_0^6 \mathrm{C}_m(q)\,dq.$$

NOM : Prénom :