Étude 1

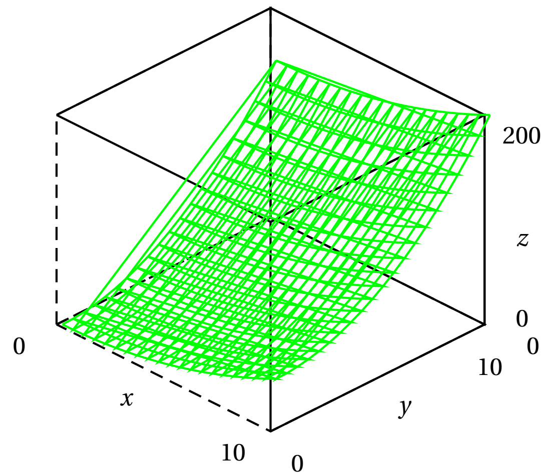
Pour modéliser la production d'une entreprise, les économistes utilisent des fonctions qui suivent le modèle dit de Cobb-Douglas : $z = \mathrm{A}x^{\alpha}y^{\beta}$ avec A, α, β réels strictement positifs), où z désigne une quantité obtenue à partir de deux quantités variables x et y.

Partie A

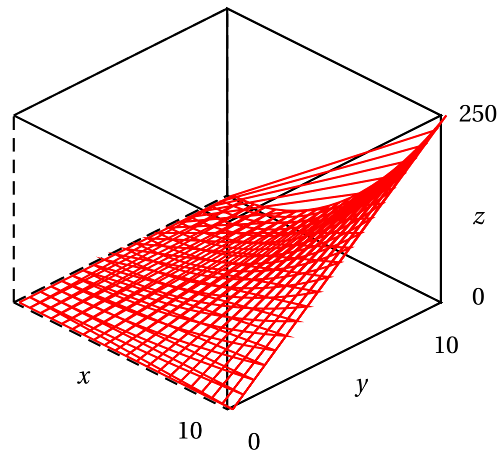
On considère les fonctions f et h définies pour $x \in [0~;~10]$ et $y \in [0~;~10]$ respectivement par

$$f(x~;~y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad h(x~;~y) = \frac{1}{4}x^2y.$$

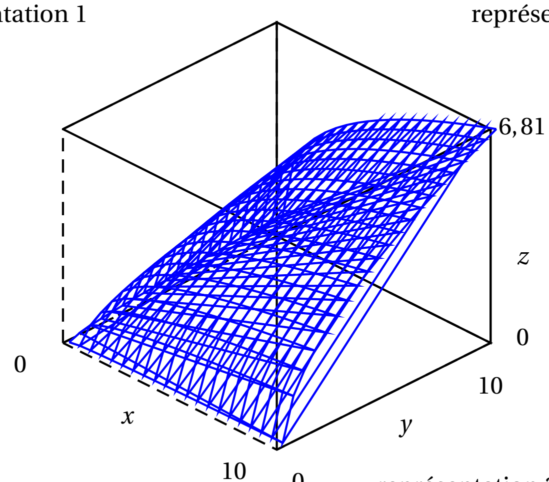
1. Vérifier que f et h sont deux fonctions de Cobb-Douglas en donnant pour chacune d'elles les valeurs A, α, β.
2. Les représentations graphiques de f et h figurent parmi les trois représentations graphiques ci-dessous. Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Les choix seront justifiés.



représentation 1



représentation 2

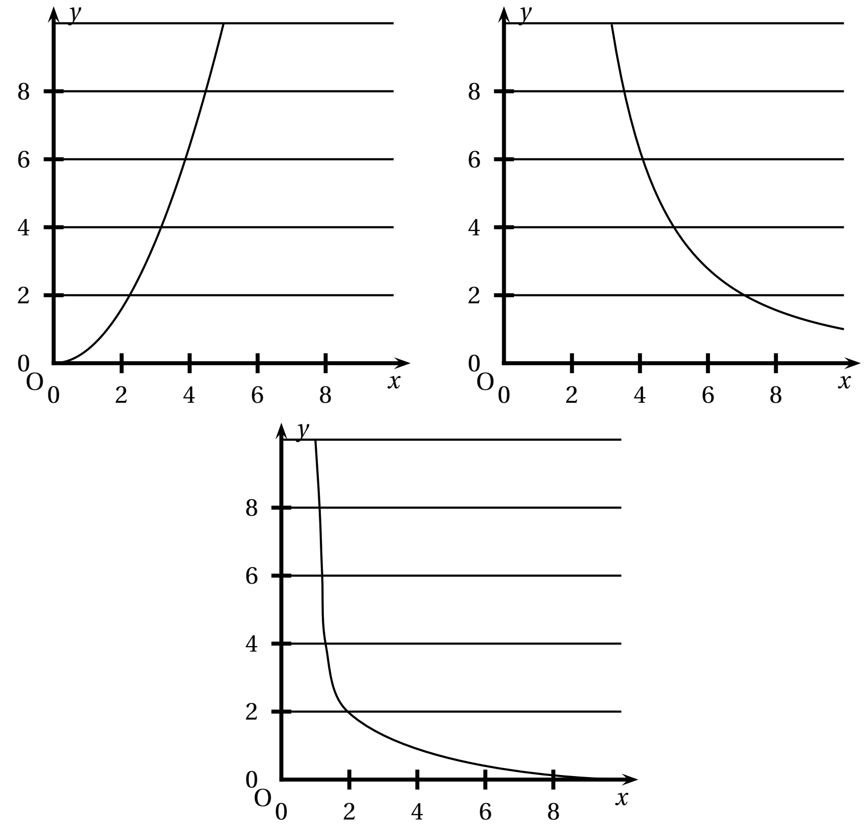


représentation 3

Partie B

La fabrication d'un produit dépend des durées de fonctionnement de deux machines M et M$'$. Les durées de fonctionnement de ces machines M et M$'$ exprimées en centaines d'heures sont respectivement égales à x et y. La quantité produite, exprimée en tonnes, est $z = h(x,~y)$, où h est la fonction définie à la **partie A**.

1. Dans cette question la quantité produite est fixée à 25 tonnes.
   Quelle est, parmi les trois représentations graphiques suivantes, celle de la section du plan d'équation $z = 25$ avec la surface d'équation $z = \frac{1}{4}x^2y$?



2. Les horaires de travail font que la somme des durées de fonctionnement des deux machines M et M′ est de huit centaines d'heures.

   (a) Montrer que $z = 2x^2 - \dfrac{1}{4}x^3$.

   (b) Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{4}x^3$ pour $x \in [0 ; 8]$.

   Étudier les variations de g et en déduire les durées de fonctionnement x et$y$ qui assurent une production maximum.

Étude 2

Au 1^er^ janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population

globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10 % des propriétaires deviennent locataires tandis que 20 % des locataires deviennent propriétaires.

1. On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1^er^ janvier de l'année 2000+n (n entier supérieur ou égal à 0), et par l_n, la probabilité qu'il soit locataire.
   La matrice $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après n années.

   (a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer l'état probabiliste P_1.

   (c) Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?

2. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times \mathrm{M}$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$.

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,7$.

   (b) Exprimer u_n en fonction de n et démontrer que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times 0,7^n + \dfrac{2}{3}$.

   (c) Calculer la limite de la suite $\left(p_n\right)$ et retrouver le résultat de la question 1. c.