SUJET NSP

NOM Prénom

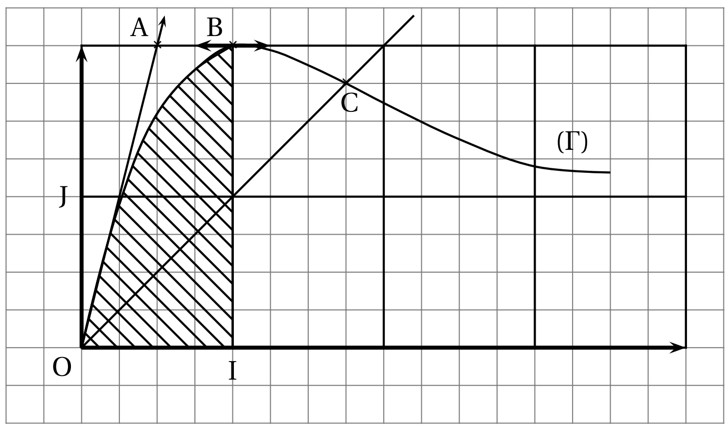
Il faut rendre la copie et le sujet ensemble, après avoir renseigné la ligne supérieure.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormal du plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm, la courbe (Γ), tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;3,5]$.

- I et J sont les points du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \vec{\jmath}$;
- C est le point de (Γ) situé sur la droite $(y = x)$, bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{IOJ}}$;
- (OA) est la tangente en O à (Γ) ;
- $\mathscr{S}$ est la surface hachurée sur la figure ci-dessous :



1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a. Quelles sont les valeurs de $g'(0)$ et de $g'(1)$?

b. Quelles sont les coordonnées des point A, B et C ?

c. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant x$ sur $[0\,;3,5]$.

2. Par lecture graphique :

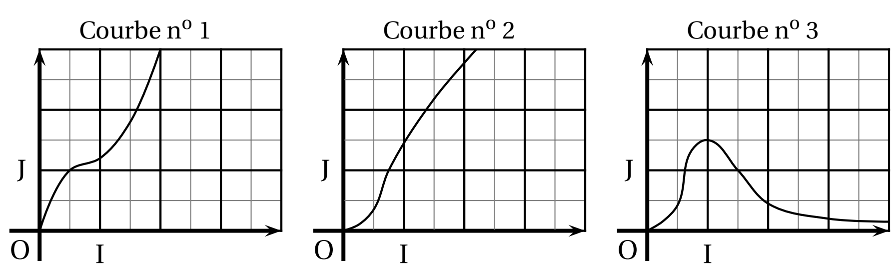
a. Calculer l'aire du trapèze OIBA en cm^2.

b. Colorier sur le graphique un polygone inclus dans OIBA et dont l'aire est de 2 cm^2 inférieure à celle de OIBA.

c. En déduire la valeur entière la plus proche de l'aire de $\mathscr{S}$.

Rappel : l'aire d'un trapèze est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$ *où* B *et* b *sont les bases du trapèze et* h *sa hauteur.*

3. On suppose que l'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive de la fonction g s'annulant en 0. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui est la représentation graphique de cette primitive.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.

Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.

Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.

Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.

Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ».

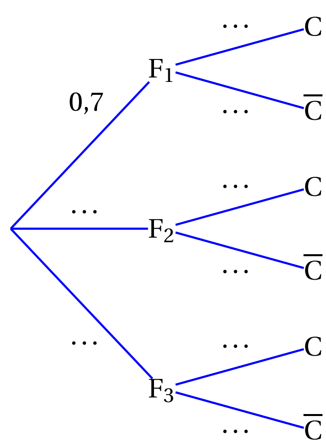
Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.

On appellera :

- F_1 l'événement : « la pomme prélevée provient du premier producteur » ;
- F_2 l'événement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur » ;
- F_3l'événement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur » ;
- C l'événement : « la pomme prélevée a un bon calibre » ;
- $\overline{C}$ l'événement : « la pomme prélevée est hors calibre ».

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} *près.*

1. Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3 en citant l'énoncé.
2. Compléter l'arbre suivant :



3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,144 0.
4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : 0,846 5.
5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme :« Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».

   Quel calcul permet de justifier cette affirmation ? Faire ce calcul et conclure.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur $\mathcal{I} =]0\,;\,5]$ par

$$f(x) = 1 - x + 2\ln(x).$$

La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de f sur l'intervalle $\mathcal{I}$ dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. On étudie les variations de f :

   a. Calculer la limite de f en 0.

   b. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe sur $\mathcal{I}$.

   c. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathcal{I}$.

2. On étudie maintenant l'équation $f(x) = 0$:

   a. Justifier que $f(1) = 0$.

   b. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]3\,;\,4]$ une solution unique α.

   c. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur décimale arrondie au centième de α.

3. Déduire de la question précédente le tableau de signes de f sur $\mathcal{I}$.

4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par

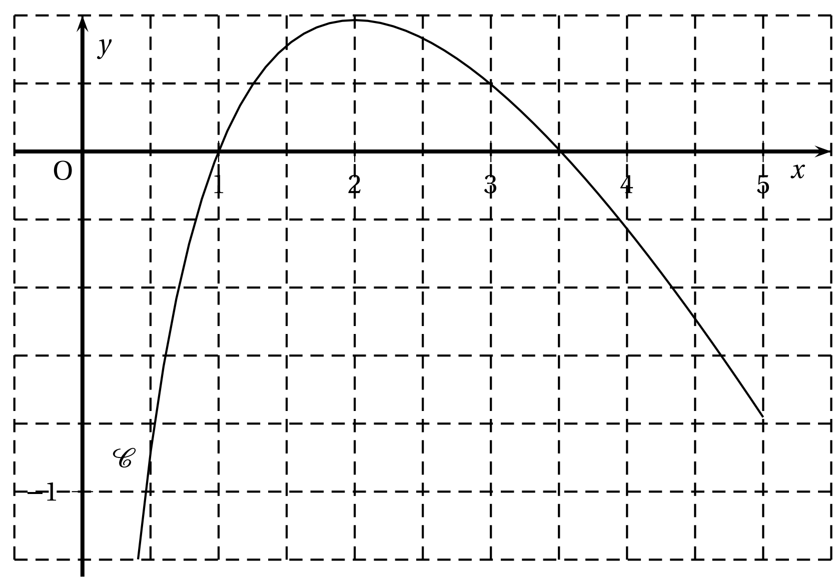
$$g(x) = 2\big(x\ln(x) - x\big) - \frac{1}{2}x^2 + x$$

et on admet que $g'(x) = f(x)$ sur $\mathcal{I}$.

   a. Hachurer sur le graphique ci-après (à remettre avec la copie) le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses de $x = 1$ à $x = \alpha$.

   b. Expliquer pourquoi l'aire $\mathcal{A}$ de ce domaine est égale, en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.

   c. Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ exprimée en cm^2. *On utilisera la valeur approchée de α trouvée au* 3. b.



EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1998 elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Bénéfice en k€ : y_i	64	75	100	113	125

1. **a.** Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal.
   - 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
   - 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

   b. Donner les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir à l'unité). Placer le point G dans le repère.

2. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.

   a. Donner une équation de la droite D de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   b. Placer le point moyen G de la série dans le repère précédent.

   c. Représenter la droite D dans ce même repère.

3. Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec cet ajustement ?