SUJET SP

NOM Prénom

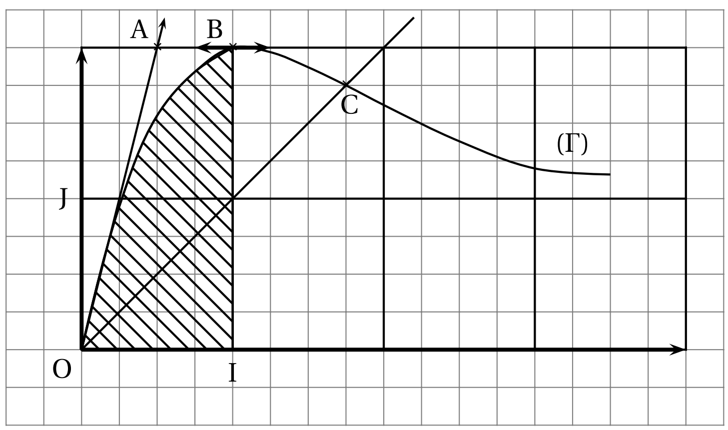
Il faut rendre la copie et le sujet ensemble, après avoir renseigné la ligne supérieure.

EXERCICE 1 **5 points**

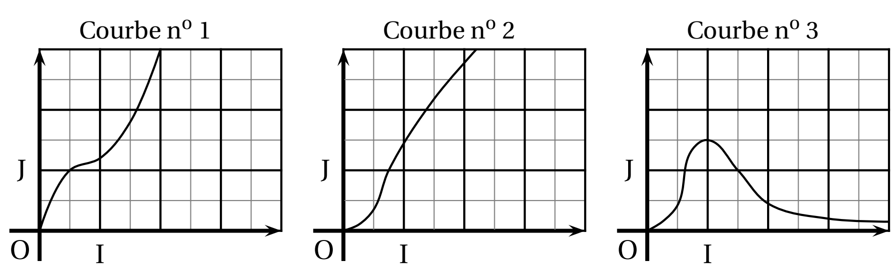
Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormal du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm, la courbe (Γ), tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;3{,}5]$.

- I et J sont les points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$;
- C est le point de (Γ) situé sur la droite $(y = x)$, bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$;
- (OA) est la tangente en O à (Γ) ;
- $\mathscr{S}$ est la surface hachurée sur la figure ci-dessous :



1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a. Quelles sont les valeurs de $g'(0)$ et de $g'(1)$?
   b. Quelles sont les coordonnées des point A, B et C ?
   c. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant x$ sur $[0\,;3{,}5]$.
2. Par lecture graphique :
   a. Calculer l'aire du trapèze OIBA en cm^2.
   b. Colorier sur le graphique un polygone inclus dans OIBA et dont l'aire est de 2 cm^2 inférieure à celle de OIBA.
   c. En déduire la valeur entière la plus proche de l'aire de $\mathscr{S}$.
   Rappel : l'aire d'un trapèze est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$ *où* B *et* b *sont les bases du trapèze et* h *sa hauteur.*
3. On suppose que l'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive de la fonction g s'annulant en 0. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui est la représentation graphique de cette primitive.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour fabriquer un alliage une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x, y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

L'ANNEXE 1 (à rendre avec la copie) comporte deux figures :

- La figure 1 représente la surface d'équation $z = C(x\ ;\ y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$ et $0 \leqslant y \leqslant 12$.
- La figure 2 représente les courbes de niveau de cette surface pour z variant dc 20 en 20.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

Cette partie est un questionnaire choix multiples constitué de deux questions, chacune comportant quatre propositions de réponse dont une seule est exacte. *Une bonne réponse rapportera* 0,5 *point. Une mauvaise réponse sera pénalisée de* 0,25 *point. Si le total des points de cette partie est négatif, la note attribuée sera* 0. Les réponses seront indiquées sur la copie. Aucune justification n'est demandée.

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x\ ;\ y)$?

   $\boxed{\textbf{a}}$ M(13 ; 9 ; 60) $\boxed{\textbf{b}}$ N(12 ; 4 ; 40)

   $\boxed{\textbf{c}}$ R(12 ;.8 ; 60) $\boxed{\textbf{d}}$ S(15 ; 4 ; 40)

2. La courbe de niveau $z = 20$ est :

   $\boxed{\textbf{a}}$ une parabole $\boxed{\textbf{b}}$ une droite

   $\boxed{\textbf{c}}$ une hyperbole $\boxed{\textbf{d}}$ autre réponse

Partie 2

Les métaux A et B sont achetés respectivement 0, 5 et 1 millier d'euros la tonne. L'entreprise affecte 11 milliers d'euros à l'achat des métaux.

1. Un exemple :

   Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, combien de tonnes de métal B achète-t-elle ?

2. Cas général

   Soit x la quantité de métal A et y la quantité de métal B achetée.

   Montrer que x et y sont liées par la relation $x + 2y = 22$.

3. **a.** Tracer sur la figure 2 de l'annexe 1 l'ensemble des points dont l'équation est

   $$x + 2y = 22.$$

   b. En déduire graphiquement le coût minimum de production des alliages pour un investissement de 11 milliers d'euros, et les quantités correspondantes de métaux A et B achetées.

NOM Prénom

ANNEXE 1
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie

Figure 1 : surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$

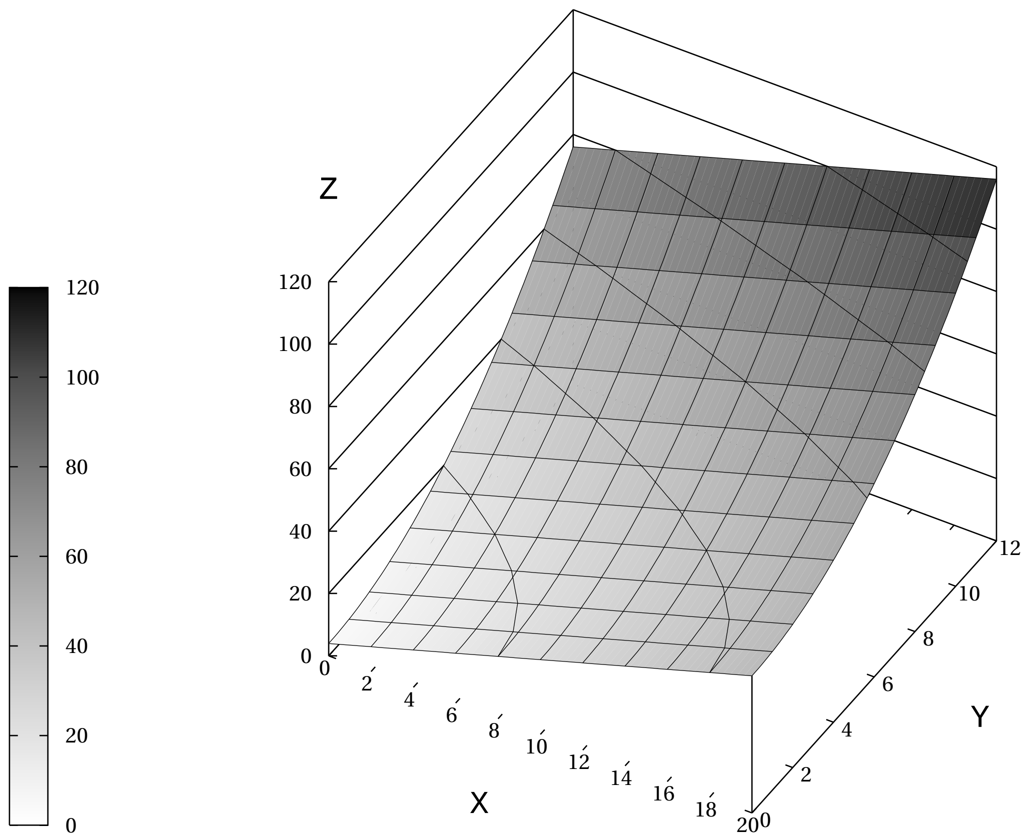
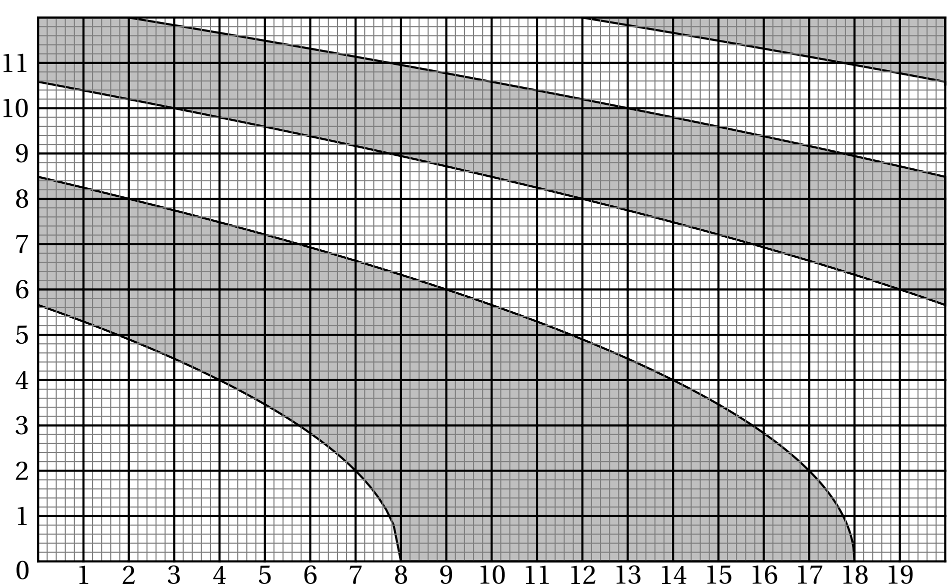


Figure 2 : courbes de niveau



EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur $\mathcal{I} =]0\,;\,5]$ par

$$f(x) = 1 - x + 2\ln(x).$$

La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de f sur l'intervalle $\mathcal{I}$ dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. On étudie les variations de f :

  a. Calculer la limite de f en 0.

  b. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe sur $\mathcal{I}$.

  c. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathcal{I}$.

2. On étudie maintenant l'équation $f(x) = 0$:

  a. Justifier que $f(1) = 0$.

  b. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]3\,;\,4]$ une solution unique α.

  c. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur décimale arrondie au centième de α.

3. Déduire de la question précédente le tableau de signes de f sur $\mathcal{I}$.

4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par

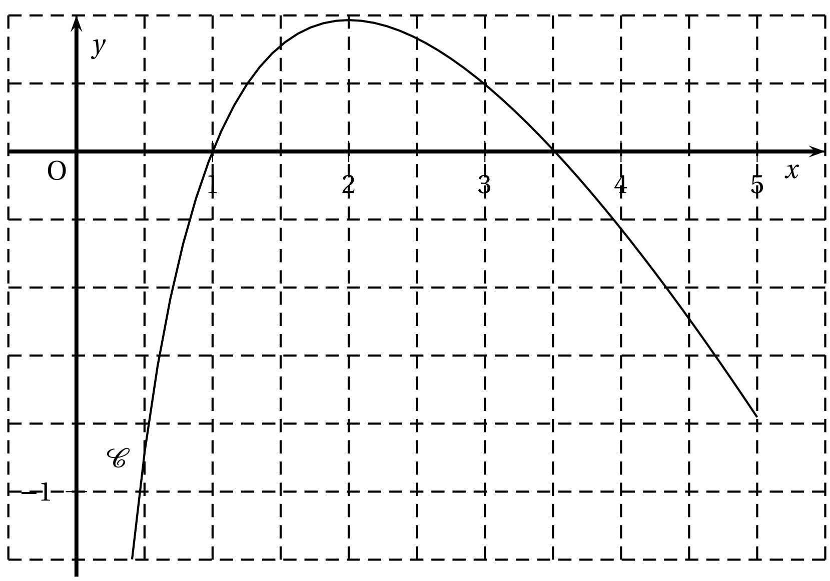
$$g(x) = 2\big(x\ln(x) - x\big) - \frac{1}{2}x^2 + x$$

et on admet que $g'(x) = f(x)$ sur $\mathcal{I}$.

  a. Hachurer sur le graphique ci-après (à remettre avec la copie) le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses de $x = 1$ à $x = \alpha$.

  b. Expliquer pourquoi l'aire $\mathcal{A}$ de ce domaine est égale, en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.

  c. Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ exprimée en cm^2. *On utilisera la valeur approchée de α trouvée au* 3. b.



EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1998 elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Bénéfice en k€ : y_i	64	75	100	113	125

1. **a.** Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal.
   - 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
   - 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

   b. Donner les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir à l'unité). Placer le point G dans le repère.

2. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.

   a. Donner une équation de la droite D de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   b. Placer le point moyen G de la série dans le repère précédent.

   c. Représenter la droite D dans ce même repère.

3. Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec cet ajustement ?