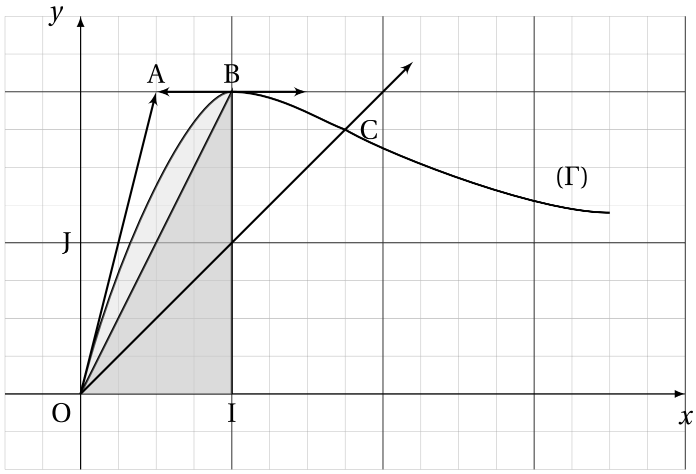
Exercice 1



1/ Lectures graphiques :

a/ pour lire g' sur la courbe de g, nous relevons le coefficient directeur des tangentes ;

- pour OA : $g'(0) = \dfrac{2}{0.5} = 4$;
- pour B, la tangente est horizontale : $g'(1) = 0$;

b/ A (0,5 ; 2) ; B (1 ; 2) ; C (1,75 ; 1,75) ;

c/ Nous regardons quelle portion de la courbe Γ se trouve au-dessus de la droite $(y = x)$; il s'agit de la portion comprise entre O et C donc dont les abscisses sont comprises entre 0 et 1,75 : les solutions de l'inéquation sont les abscisses vérifiant : $0 \leqslant x \leqslant 1{,}75$.

2/ **a/** L'énoncé nous indique que l'unité d'aire vaut : 2 cm × 2 cm = 4 cm^2.

L'aire considérée vaut : $\dfrac{(1+0{,}5)\times 2}{2} = 1{,}5$ u.a. soit 6 cm^2.

b/ Nous colorions le triangle OBI ; son aire vaut 1 u.a. donc 4 cm^2.

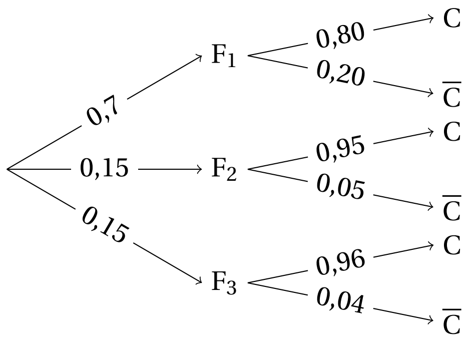
c/ Nous pouvons en déduire que l'aire de $\mathscr{S}$ arrondie à l'entier vaudra 5 cm^2.

3/
- La fonction g est toujours positive donc sa primitive est toujours croissante : nous éliminons la courbe n° 3.
- Nous avons lu que $g(0) = 0$ donc la tangente à la courbe de la primitive doit être horizontale : nous rejetons la courbe n° 1.
- Par élimination, la solution est la courbe n° 2.

Exercice 2 - non spécialistes

1/ D'après l'énoncé, *le reste [de l'approvisionnement] est également partagé entre le deuxième et le troisième producteur*, donc les deux probabilités cherchées sont égales. De plus, la somme des probabilités issues d'un noeud est égale à 1. Au final, les deux probabilités cherchées valent 0,15.

2/ L'arbre



3/ Nous lisons la probabilité sur l'arbre : la probabilité de la feuille $F_3 \cap C$ est égale au produit des probabilités des branches qui y mènent : $p(F_3 \cap C) = 0{,}15 \times 0{,}96 = 0{,}144$.

4/ La probabilité $p(C)$ est une probabilité obtenue en faisant le total des probabilités des feuilles $F_1 \cap C$, $F_2 \cap C$ et $F_3 \cap C$: $p(C) = 0{,}7 \times 0{,}8 + 0{,}15 \times 0{,}95 + 0{,}144 = 0{,}8465$.

5/ Nous savons que la pomme est hors calibre, nous allons donc rechercher la probabilité que la pomme provienne du premier producteur dans le sous-univers des pommes hors calibre ; l'arbre ne nous renseigne pas mais : $p_{\overline{C}}(F_1) = \dfrac{p\left(F_1 \cap \overline{C}\right)}{p(\overline{C})} = \dfrac{0{,}14}{1-0{,}8465} = 0{,}9121$. Plus de 90% de chances donc l'affirmation est justifiée.

Exercice 2 - spécialistes

Partie 1

1/ Nous vérifions si $z = C(x, y)$:

- $2\times 13 + 0{,}5\times 9^2 + 4 = 70{,}5$, pas d'égalité ;
- $2\times 12 + 0{,}5\times 4^2 + 4 = 36$, pas d'égalité ;
- $2\times 12 + 0{,}5\times 8^2 + 4 = 60$, égalité donc c'est le point C.

2/ Si $z = 20$ alors $20 = 2x + 0{,}5y^2 + 4$ et donc $x = -0{,}25y^2 + 8$, ce qui montre que la courbe représentant x en fonction de y est une parabole, comme nous le devinons sur la représentation graphique.

Partie 2

1/ La dépense totale est de 11 milliers d'euros pour 4 tonnes à 0,5 milliers d'euros et y tonnes à mille euros : $4\times 0{,}5 + y = 11$ donc $y = 9$. L'entreprise a acheté 9 milliers de tonnes du métal B.

2/ La dépense totale est identique pour x tonnes à 0,5 milliers d'euros et y tonnes à mille euros : $0{,}5x + y = 11$. En multipliant l'égalité par 2 : $x + 2y = 22$.

3/ **a/** Voir figure 1 : pour tracer une droite, il faut connaître deux points de cette droite : (0 ; 11) et (20 ; 1) sont deux candidats.

b/ Nous constatons que cette droite touche la ligne de niveau $z = 40$ (lecture sur la figure 1 du sujet) en M pour $x = 14$ et $y = 4$. Le coût minimum de production est donc de 40 000 euros et cette production nécessite 14 tonnes de métal A et 4 tonnes du métal B.

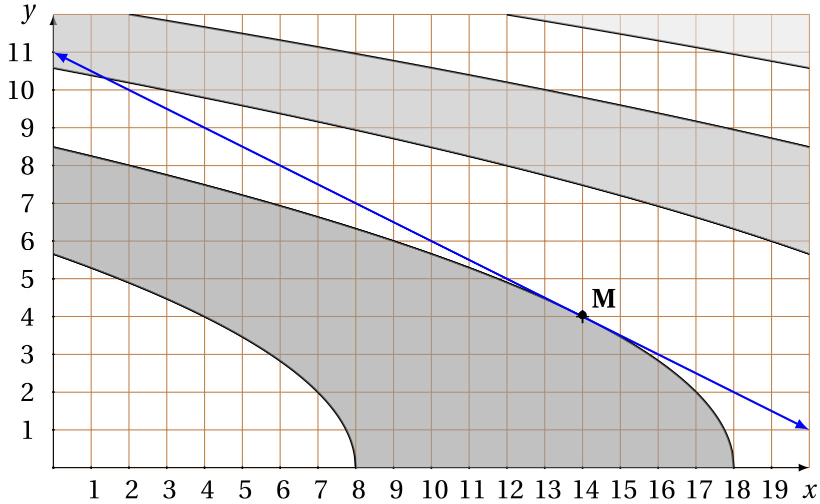


FIG. 1 – Courbe de niveaux

Exercice 3

1/ Les variations

a/ Nous savons que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$,
donc $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - x + 2\ln(x)\right) = 1 - 0 - \infty = -\infty$,
ce qui se constate sur la courbe à proximité de l'axe des ordonnées.

b/

$1-x$	-1
$2\times\ln(x)$	$2\times\dfrac{1}{x}$
$f(x)$	$f'(x) = -1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2-x}{x}$

$f'(x)$ est du signe de $2-x$, car x est positif, donc positif avant $x=2$ et négatif après.

c/ Les variations :

x	0		2		5
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0,39	↘	−0,78

2/ L'équation :

a/ Nous savons que $\ln(1)=0$ donc $f(1)=1-1+2\times 0=0$.

b/ L'intervalle $[3;4]$ est inclus dans l'intervalle $[2;5]$ sur lequel, d'après le tableau de variations, la fonction f est décroissante des positifs vers les négatifs ; elle passe donc une unique fois par 0 et l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

c/ À l'aide de la table de valeurs de la calculatrice, nous trouvons $\alpha\approx 3{,}51$.

3/ Le tableau de signes :

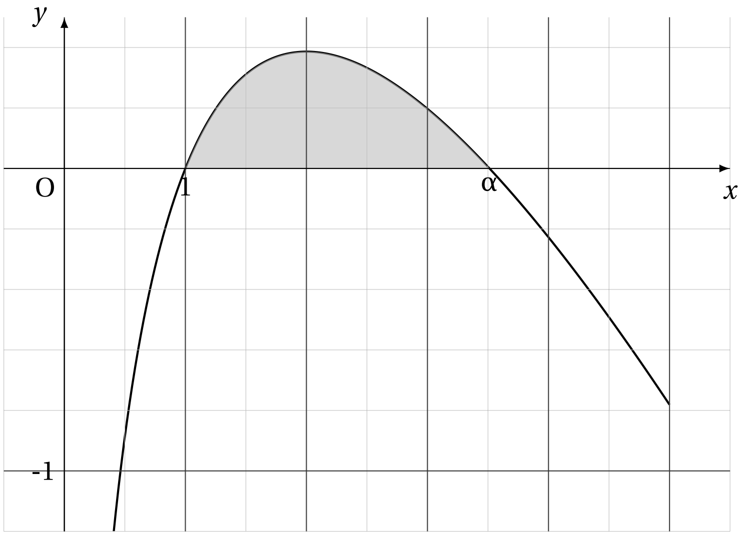
x	0		1		3,51		5
$f(x)$	‖	−	0	+	0	−	

4/ L'aire

a/ Voir le graphique.

b/ L'aire de ce domaine se calcule en posant : $\int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ intégrale qui, d'après le cours, est obtenue en calculant $g(\alpha)-g(1)$ avec une fonction g primitive de la fonction f. Toutes choses vérifiées d'après l'énoncé.

c/ $g(3{,}51)-g(0)\approx 0{,}64$ u.a. et une unité d'aire vaut 2 cm × 5 cm = 10 cm^2.
Donc l'aire mesure 6,4 cm^2.



Exercice 4

1/ **a/** Voir le graphique

b/ G : (2 ; 95,4)

2/ **a/** D'après la calculatrice : $y = 16x + 63,4$

b/ Voir le graphique.

3/ En 2005, $x = 6$ donc $y = 159,4$, par conséquent on peut estimer, toutes choses restant égales, que les bénéfices s'élèveront à 159 400 euros.