

POLYNÉSIE JUIN 2006 - EXERCICE 4

6 points

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

Dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm sur chaque axe, on note \mathcal{C}_f sa représentation graphique et \mathcal{C}_{exp} la représentation graphique de la fonction exponentielle.

1.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. Donner les valeurs de $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ et de $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$.
 - c. En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2.
 - a. On note f' la fonction dérivée de f sur \mathbb{R} , montrer que $f'(x) = (x+1)(x+2)e^x$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
 - c. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. Déterminer le signe de f sur \mathbb{R} .
4.
 - a. Préciser les positions relatives de \mathcal{C}_f et de \mathcal{C}_{exp} .
 - b. Construire ces deux courbes dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
5. Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F(x) = (x^2 - x + 2)e^x$. Prouver que F est une primitive de f sur \mathbb{R} .
6.
 - a. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine \mathcal{D} délimité par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
 - b. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine \mathcal{D}' délimité par les \mathcal{D} et \mathcal{C}_{exp} , et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

CENTRES ÉTRANGERS JUIN 2006 - EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près

Le tableau ci-dessous donne le PIB de la Chine, en milliards de dollars, entre 1982 et 2002.

Année	1982	1986	1990	1994	1998	2002
Rang x_i de l'année	0	4	8	12	16	20
PIB y_i	280	300	384	546	945	1232

(Le Monde du 26/01/2004)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 1 cm pour deux années sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 100 milliards de dollars sur l'axe des ordonnées.
2.
 - a. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
 - b. Tracer cette droite sur le graphique.
 - c. Avec cet ajustement, estimer graphiquement et par le calcul le PIB de la Chine en 2004. Commenter le résultat obtenu.
3. On envisage dans cette question un ajustement exponentiel.
En posant $z = \ln y$ on obtient une droite d'ajustement de z en x d'équation $z = 0,08x + 5,46$.
 - a. On se propose de déterminer alors y en fonction de x sous la forme $y = \alpha e^{\beta x}$ où α et β sont deux réels.
Montrer que $y = 235,10e^{0,08x}$.
 - b. Tracer sur le graphique la courbe d'équation $y = 235,10e^{0,08x}$, pour $x \in [0 ; 24]$.
 - c. Avec cet ajustement, estimer graphiquement et par le calcul, le PIB de la Chine en 2004.
4. Le PIB de la Chine pour 2004 était de 1 650 milliards de dollars (Source internet). Calculer en pourcentage par rapport à la valeur réelle, les erreurs commises en prenant comme PIB les estimations obtenues aux questions 2 et 3.