Commun à tous les candidats

Partie 1

Soient les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,9]$ par

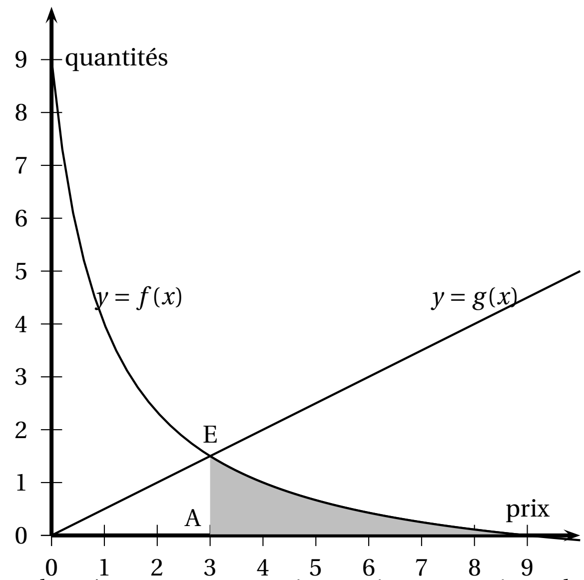
$$f(x) = \frac{10}{1+x} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{2}.$$

1. Résoudre algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

2. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte de I.

Partie 2

Un produit conditionné en boite est mis sur le marché. On désigne par x le prix d'une boîte de ce produit en dizaines d'euros.
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x appliqué sur le marché, est donnée par $f(x)$ en centaines de boîtes.
On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs, en fonction du prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donnée par $g(x)$ en centaines de boîtes.
Sur le graphique ci-contre, sont tracées dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.



1. On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.

a. Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 euros la boite ?

b. Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché a atteint son équilibre. Donner le prix d'équilibre, en euros, et le nombre de boîtes correspondant.

2. **a.** D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre. On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'euros par l'aire du triangle OAE (1 unité d'aire = 1 millier d'euros). Calculer ce surplus en euros.

b. Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3 \leqslant x \leqslant 9$). Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.

NOUVELLE CALÉDONIE NOV 2005 - EXERCICE 3 **9 points**

Commun à tous les candidats

On considère re la fonction f définie sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln(2x-4)$.

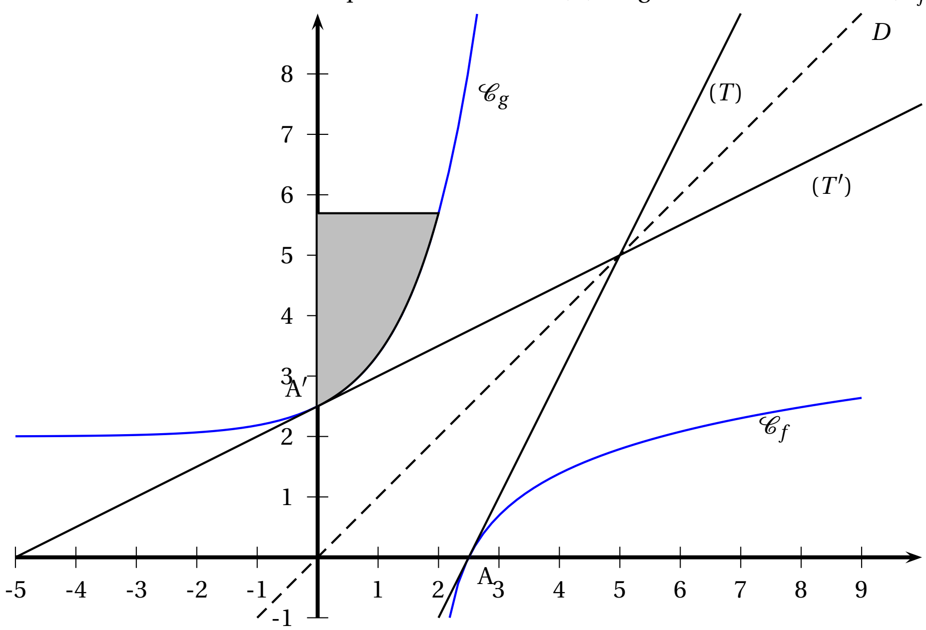
On appelle $(\mathscr{C}_f)$ la courbe tracée ci-dessous, représentative de f dans un repère orthonormal.

1. **a.** D éterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

b. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

c. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses au point A. Quelles sont les coordonnées exactes de A ?

d. Déterminer une équation de la droite (T) tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.



2. Sur la figure ci-dessus, on a tracé la courbe $(\mathscr{C}_f)$, le point A, la droite (T) et la droite (D) d' équation $y = x$. Par la symétrie axiale d'axe (D), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ se transforme en une courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative d'une fonction g définie dans $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout x réel, $g(x)$ s'écrit sous la forme $g(x) = a + be^x$ où a et b sont deux nombres réels. La courbe $(\mathscr{C}_g)$ ainsi construite passe par le point A' image de A par la symétrie d'axe (D). De plus, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ admet au point A' une tangente (T') qui est l'image de la droite (T) par la symétrie d'axe (D).

a. Donner, sans justification, le coefficient directeur de la droite (T').

b. Calculer a et b en justifiant soigneusement les calculs.

c. Calculer l'ordonnée exacte du point E appartenant à $(\mathscr{C}_g)$ et ayant pour abscisse 2.

d. Quelles sont les coordonnées du point E' image de E par la symétrie d'axe (D) ?

3. **a.** Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 \left(2 + \frac{1}{2}e^x\right) dx$.

b. En déduire l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, du domaine hachuré défini par la courbe $(\mathscr{C}_g)$, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E. On demande la valeur exacte du résultat.

c. Expliquer comment on peut en déduire, sans faire de calculs, la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{5}{2}}^{2+\frac{1}{2}e^2} f(x)\,dx$.