α β γ δ ϵ η θ ϕ **20 min : corrigé** χ λ μ ν π ρ σ ω

Savoir déterminer les variations d'une fonction composée

Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = -2x+3 \quad \text{et} \quad v(x) = x^2-2$$

1/ Le théorème sur le sens de variation de la composée de deux fonctions :
«Sur un intervalle, si deux fonctions sont strictement monotones et de même sens de variations, leur composée, quand elle est définie, est croissante ; si les deux fonctions sont de sens de variations différents, leur composée est décroissante.»

2/ $f = u \circ v : x \longmapsto -2(x^2-2)+3 = -2x^2+7$ (v «dedans», u «dehors»)
$g = v \circ u : x \longmapsto (-2x+3)^2-2 = 4x^2-12x+7$ (u «dedans», v «dehors»).

3/ On donne deux nombres réels a et b (pour démontrer une propriété, on calcule avec des nombres remplacés par des lettres et non avec des nombres particuliers), a étant le plus petit : on a donc $a < b$ ou encore $b-a > 0$. De plus :

$$u(b)-u(a) = (-2b+3)-(-2a+3) \quad \text{ou encore} \quad u(b)-u(a) = -2b+2a = -2(b-a)$$

- La différence $u(b)-u(a)$ est de signe opposé à $b-a$ (la multiplication par -2) donc négative.
- Par conséquent, on peut écrire : $u(b)-u(a) < 0$ soit $u(b) < u(a)$.

Partant de $a < b$, nous avons démontré que $u(b) < u(b)$ donc la fonction u *inverse* les nombres : elle est décroissante (ce que nous savions par ailleurs, le coefficient directeur de cette fonction affine étant négatif).

4/ Le tableau de variations de la fonction v découle de celui de la fonction carré, sa représentation est la même que celle de la fonction carré mais translatée du vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Le minimum change, 0 est celui de la fonction carré : pour tout x, $x^2 \geqslant 0$ et par suite $x^2-2 \geqslant -2$, ce qui signifie que -2 est le minimum de v.

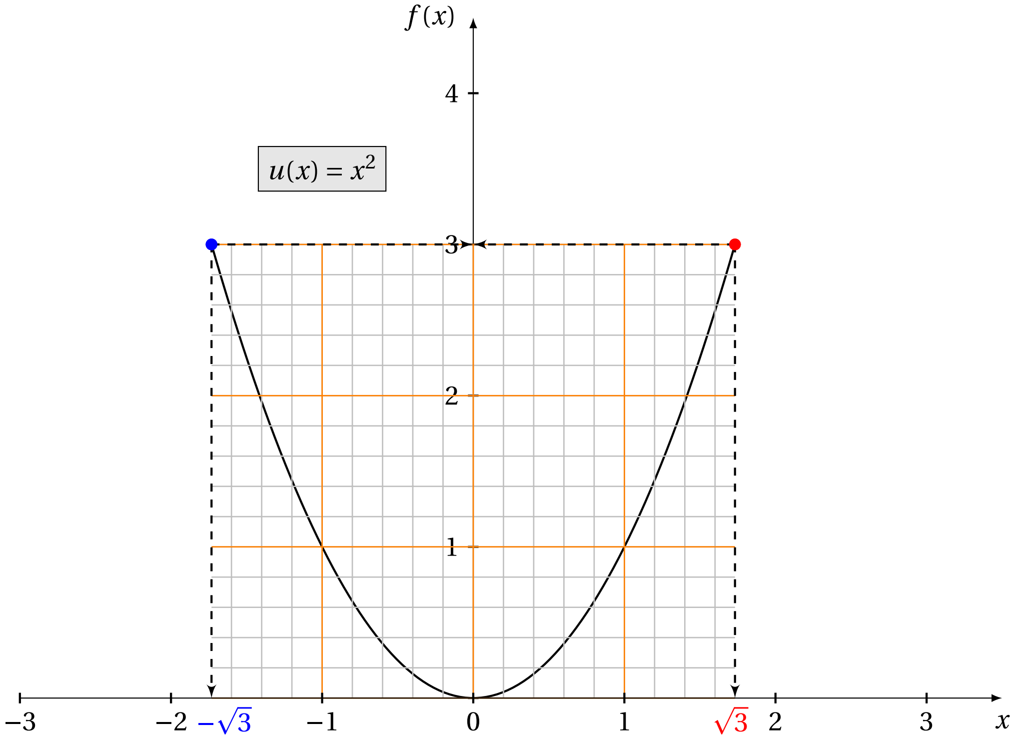
x	$-\infty$		0		$+\infty$
v		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

5/ Le tableau de variations de $f = u \circ v$ se déduit de celui de la question précédente en appliquant le théorème cité en début de ce texte :

- sur $]-\infty; 0]$, f est croissante car composée des deux fonctions décroissantes v puis u,
- sur $[0; +\infty[$, f est décroissante car composée des deux fonctions v puis u de sens de variations différents (respectivement croissant puis décroissant).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	7	$\searrow$	

Savoir déterminer le tableau de variations d'une fonction composée



1/ Nous cherchons le plus grand intervalle $\mathscr{D}_u$ tel que chacun de ses nombres ait son image par u dans $\mathscr{D}_v = [-4\,;3]$.

Il doit être solution de l'inéquation double : $0 \leqslant x^2 \leqslant 3$ (un carré n'étant jamais négatif, son image doit être dans la partie positive de $\mathscr{D}_v$).

C'est : $\mathscr{D}_u = \left[-\sqrt{3}\,; \sqrt{3}\right]$

2/ Le tableau des variations de u sur $\mathscr{D}_u$:

x	$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$
u	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

3/ Le tableau des variations de $g = v \circ u$ s'obtient en application du théorème cité au début de ce texte :

- sur $\left[-\sqrt{3}\,;0\right]$, g est croissante car composée de u décroissante et dont les images sont dans $[0\,;3]$ puis de v décroissante sur cet intervalle, avec des images dans $[-2\,;0]$;
- sur $\left[0\,;+\sqrt{3}\right]$, g est décroissante car composée de u croissante et dont les images sont dans $[0\,;3]$ puis de v décroissante sur cet intervalle, avec des images dans $[-2\,;0]$.

x	$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$
v	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2