

Exercice n°86 page 27 (Hyperbole)



- **Phase d'observation :**

- Ensorcelons un nombre plusieurs fois :

$$7 \mapsto 2 \mapsto \frac{1}{3} \mapsto -3 \mapsto 7$$

Nous constatons donc qu'après 4 ensorcellements nous retrouvons notre nombre initial... Cela incite à recommencer :

$$12 \mapsto \frac{31}{13} \mapsto \frac{7}{11} \mapsto -\frac{17}{9} \mapsto 12$$

Harry est trop fort... mais cela ne nous dispense pas de réfléchir.

- **Phase de modélisation :**

- Ensorceler un nombre, c'est appliquer un calcul à un nombre donné. Appliquons ce calcul au nombre x , son ensorcellement nous donne :

$$\frac{3x-5}{x+1}$$

Nous définissons alors la fonction du sorcier :

$$f : x \mapsto \frac{3x-5}{x+1}$$

- Première remarque : il serait bien étonnant qu'Harry puisse ensorceler -1 ... car diviser par zéro, même un sorcier ne peut y parvenir.

- **Phase de démonstration :**

- Quand le sorcier applique son ensorcellement sur un nombre ensorcelé, cela ressemble fort à ce que nous avons défini comme étant la composition des fonctions... Calculons donc les composées successives :

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{3x-5}{x+1} \mapsto f \circ f(x) = \frac{x-5}{x-1} \mapsto f \circ f \circ f(x) = -\frac{x+5}{x-3} \mapsto f \circ f \circ f \circ f(x) = x$$

- Deuxième remarque : si -1 ne peut pas être ensorcelé, 1 ne pourra l'être qu'une seule fois et 3 ne pourra l'être que deux fois... justification analogue à la première remarque.
- Troisième remarque : nous avons démontré que, sauf exceptions, après quatre ensorcellements, un nombre redevient lui-même... c'est ce que nos essais avaient suggéré.
- Quatrième remarque : qu'Harry ensorcelle un nombre 2 000 fois ou qu'il l'ensorcelle quatre fois ($4 \times 500 = 2\,000$), c'est du pareil au même.

Conclusion : Après 2 000 ensorcellements, tout nombre différent de -1 , 1 ou 3 redevient lui-même.

- **Illustration :** Sur la figure ci-dessous, la construction des nombres ensorcelés en partant de 7.

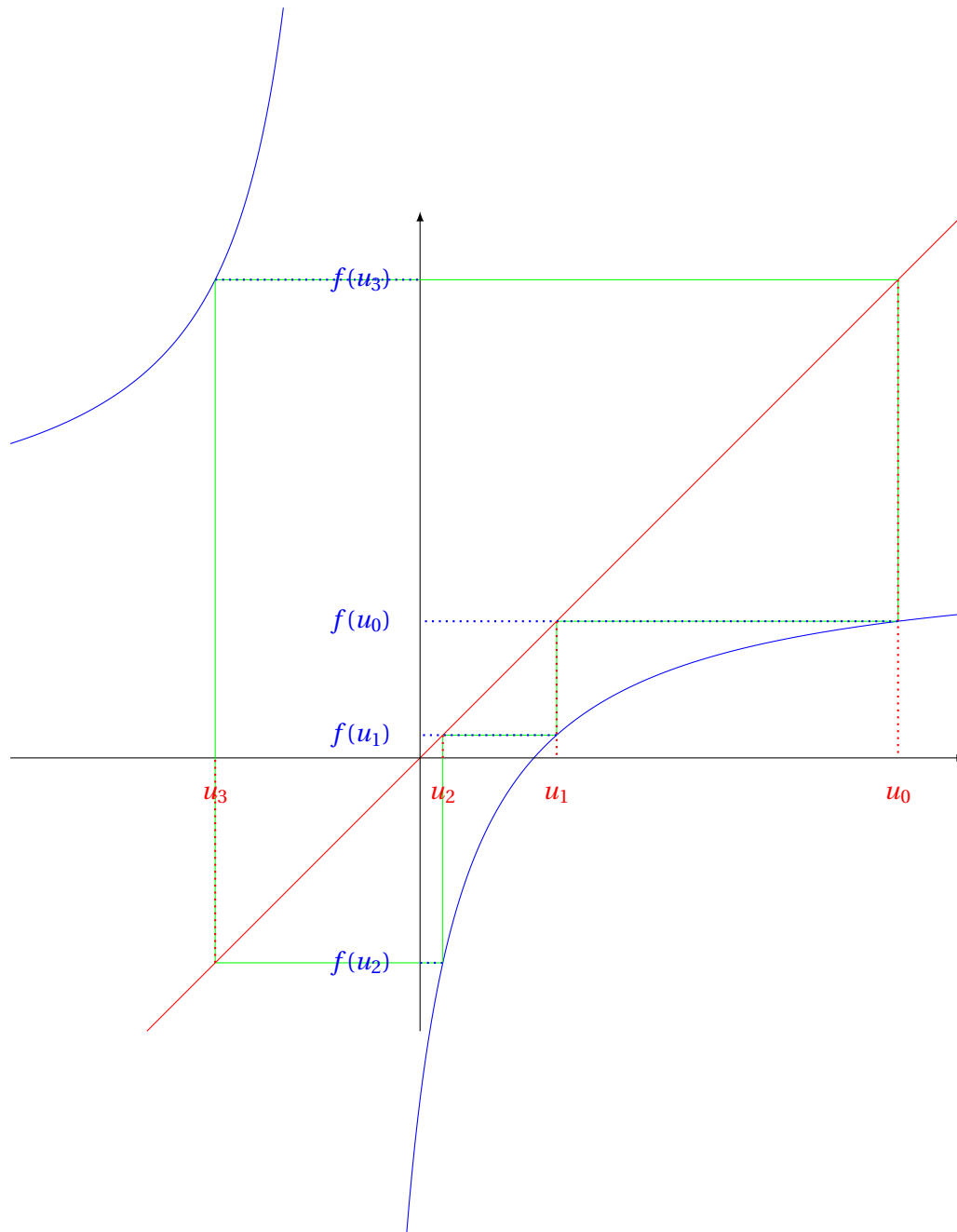


FIG. 1 - $u_{n+1} = f(u_n)$; $u_0 = 7$; $f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$