## 1. Savoir lire une représentation graphique

**1/** Graphiquement les valeurs lues : l'ordonnée de C : $f(0) = 1$, le coefficient directeur de la tangente en A : $f'(-2) = 1$, le coefficient directeur de la tangente en B : $f'(-1) = 0$, le coefficient directeur de la tangente en C : $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et le coefficient directeur de la tangente en D : $f'(2) = 0$.

**2/** Au point C, l'abscisse vaut 0, l'ordonnée 1 et le coefficient directeur de la tangente $-\frac{1}{2}$. Nous appliquons la formule apprise : $y - 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 0)$ ce qui s'écrit aussi $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

**3/** Graphiquement, nous lisons une solution de l'équation $f(x) = 0$ à l'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses : $x \approx -2{,}6$.

**4/** Graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 1$ a pour solutions les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au-dessus de la ligne de niveau $y = 1$. C'est approximativement l'intervalle $[-1{,}8\,;\,0]$.

## 2. Savoir étudier les variations d'une fonction économique

Le coût total de production de $q$ milliers d'unités d'un jouet est donné, en euros, par :

$$\mathrm{C}(q) = 0{,}005\,q^3 - 1{,}5\,q^2 + 220\,q \qquad \text{avec} \qquad q \in [1\,;\,300]$$

**1/** La fonction dérivée $\mathrm{C}'(q)$ :

| fonction | $0{,}005q^3$ | $-1{,}5q^2$ | $220q$ |
|---|---|---|---|
| dérivée | $0{,}005 \times 3q^2$ | $-1{,}5 \times 2q$ | 220 |

Donc $\mathrm{C}'(q) = 0{,}015q^2 - 3q + 220$.

**2/** Démontrer que le coût total est une fonction croissante sur [1 ;300] revient à montrer que sa dérivée est toujours positive. Cette dérivée est une fonction trinôme (de degré 2).

Nous constatons que $a = 0{,}015$ est positif et que $\Delta = -4{,}2$ donc négatif. Nous en déduisons que la fonction trinôme est entièrement dans les positifs donc que $\mathrm{C}'(q) > 0$ et par conséquent que C est une fonction strictement croissante.

**3/** Le coût marginal : $\mathrm{C}_m(q) = 0{,}015q^2 - 3q + 220$

**4/** La dérivée de $\mathrm{C}_m(q)$ : $\mathrm{C}'_m(q) = 0{,}03q - 3$

**5/** Les tableaux :

| $q$ | 1 | | 100 | | 300 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $\mathrm{C}'_m(q)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| Variations de $\mathrm{C}_m$ | 220 | ↘ | 70 | ↗ | 670 |

**6/** D'après le tableau de variations, le coût marginal est à son minimum (70) pour $q_m = 100$.

**7/** Le coût total de production de cent milliers de jouets : $\mathrm{C}(100) = 12\,000$ soit 12 000 euros.

**3. Savoir étudier et représenter graphiquement une fonction**

**1/** La fonction dérivée $f(x)$ :

| fonction | $\frac{1}{3}x^3$ | $x^2$ | $-3x-\frac{20}{3}$ |
|---|---|---|---|
| dérivée | $\frac{1}{3}\times 3x^2$ | $2x$ | $-3$ |

Donc $f'(x) = x^2 + 2x - 3$.

**2/** $f'(x)$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 1$ et $\Delta = 16$. Cette fonction admet donc deux racines $-3$ et 1 et sa représentation graphique, une parabole, est orientée vers les positifs. Nous en déduisons le tableau de signes suivant :

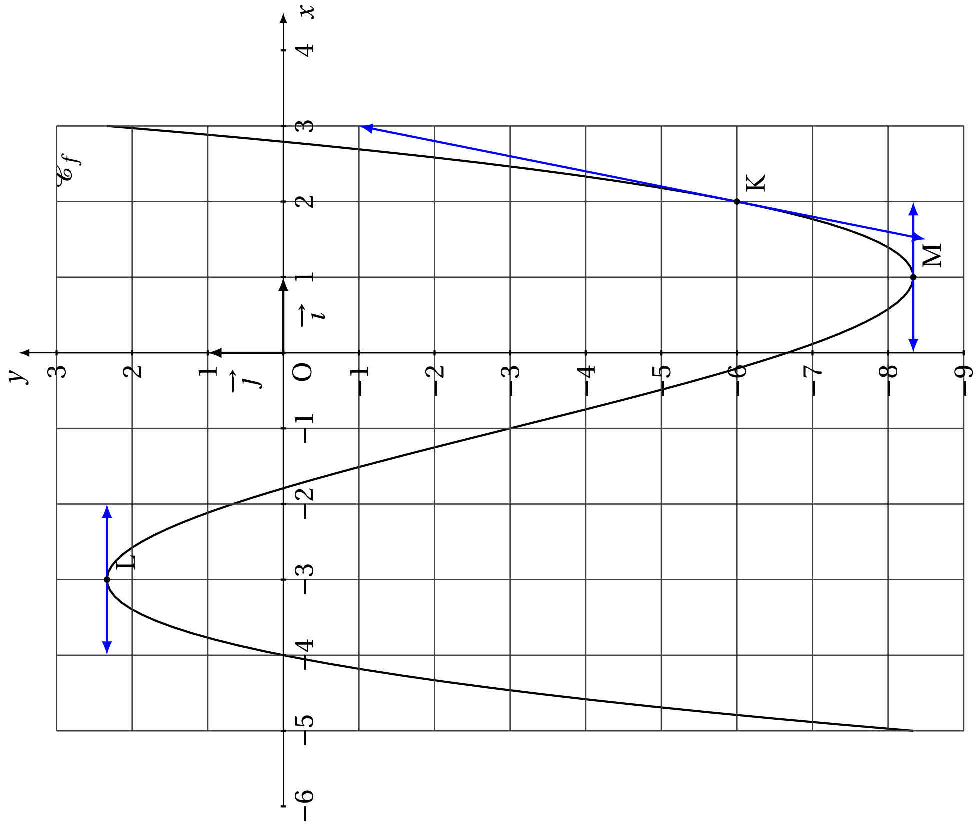
| $x$ | $-5$ | | $-3$ | | $1$ | | $+5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**3/** Le tableau de variations de $f$ se déduit du tableau de signes :

| $x$ | $-5$ | | $-3$ | | $1$ | | $+3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $-\frac{25}{3}$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{3}$ | $\searrow$ | $-\frac{25}{3}$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{3}$ |

**4/** L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ au point K d'abscisse 2 :
$f(2) = -6$ et $f'(2) = 5$ donc $y - (-6) = 5(x-2)$ soit $y = 5x - 16$.

**5/** D'après le tableau de variations, la tangente au point L d'abscisse $-3$ et celle au point M d'abscisse 1 sont horizontales.



**4. Savoir distinguer entre la courbe de la fonction et celle de sa dérivée**

**1/** Le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $\nearrow$ | 2,8 | $\searrow$ |

**2/** Le tableau de signes de la fonction $f'$ :

| $x$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| Signe $f'(x)$ | + | 0 | − |

**3/** Le tableau de signes de la fonction $f$ :

| $x$ | | $-2$ | |
|---|---|---|---|
| Signe $f(x)$ | − | 0 | + |

**4/** Le tableau de variations de la fonction $g$ :

| $x$ | | $-2$ | |
|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

**5/** La courbe 1 est la seule qui correspond au tableau de signes de $f'$ car elle est d'abord dans les négatifs puis après dans les positifs. La courbe 3 est la seule qui correspond au tableau de variations de $g$ car elle est seule décroissante puis croissante.

**6/** Nous lisons $f(0) = 2$ (ordonnée de A) et $f'(0) = -1$ (coefficient directeur de la tangente en A).