L'énoncé

On donne la fonction $f : x \mapsto f(x) = -2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{3}\right]$ définie sur $\mathbf{R}$.

1/ Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-1,5\,;\,2,5]$

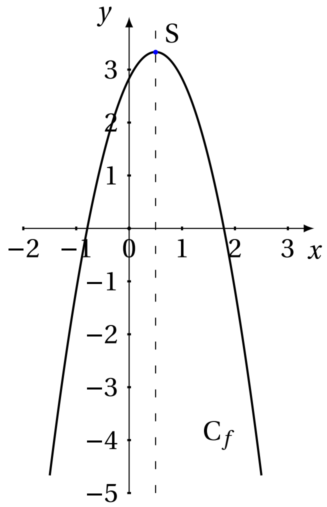
2/ Démontrer que $\mathscr{C}_f$, a pour sommet le point $S\left(\frac{1}{2};\frac{10}{3}\right)$ en prouvant que : $\forall x \in \mathbf{R},\quad f(x) \leqslant \frac{10}{3}$.

3/ Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $I = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ en prouvant que pour toute paire de nombres a et b de I tels que $a < b$, on a $f(b) - f(a) > 0$.

4/ Démontrer que la fonction f admet un axe de symétrie que l'on déterminera en utilisant une formule recherchée sur la toile.

Le corrigé

1/ La courbe.



2/ Démontrons d'abord que « $\frac{10}{3}$ *majore* la fonction f », c'est à dire que ce nombre $\frac{10}{3}$ est supérieur ou égal à toute valeur de $f(x)$.

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

$$\text{équivaut à} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{3} \geqslant -\frac{5}{3} \quad \text{ou encore} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad -2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{3}\right] \leqslant \frac{10}{3}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) \leqslant \frac{10}{3}$$

Démontrons que le point S est un point de la courbe, c'est à dire que son ordonnée est l'image par f de son abscisse. Le calcul donne :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$$

En conclusion, S est un point de la courbe dont l'ordonnée majore toutes les autres ordonnées des points de la courbe, c'est le sommet de la courbe.

3/ Comme déjà vu dans d'autres occasions, nous calculons $f(b)-f(a)$:

$$\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= -2\left[\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{3}\right]-(-2)\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{3}\right] \\
&= -2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{10}{3}+2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{10}{3} \\
&= 2\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right] \\
&= 2\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)-\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)+\left(b-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= 2(a-b)(a+b-1)
\end{aligned}$$

Examinons les facteurs de ce produit :

- il est évident que 2 est un nombre positif;
- nous savons que $a<b$ donc $a-b<0$;
- nous savons que $a<\frac{1}{2}$ et $b<\frac{1}{2}$ donc $a+b<1$ et $a+b-1<0$.

Nous pouvons donc affirmer que le produit $2(a+b-1)(a-b)$ est positif... ce qui signifie que $f(b)>f(a)$ ou encore que la fonction est croissante sur I.

4/ Les deux premiers liens relevés sur la Toile :

- `http://homeomath.imingo.net/cf2.htm`
- `http://paquito.amposta.free.fr/glosss/sym%E9trif.htm`

Nous retenons donc que pour affirmer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un axe de symétrie $(x=a)$, nous devons vérifier que sur l'ensemble de définition de f : $\forall h,\quad f(a+h)=f(a-h)$.

Un premier calcul :

$$f(a+h)=-2\left[\left(a+h-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{3}\right]$$

et

$$f(a-h)=-2\left[\left(a-h-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{3}\right]$$

De l'égalité, nous déduisons $f(a+h)-f(a-h)=0$ soit :

$$\left(a+h-\frac{1}{2}\right)^2-\left(a-h-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

ou

$$\left[\left(a+h-\frac{1}{2}\right)-\left(a-h-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(a+h-\frac{1}{2}\right)+\left(a-h-\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

qui se réduit :

$$2h(2a-1)=0$$

Cette égalité doit être vérifiée pour toute valeur de h donc elle implique que $2a-1=0$ soit $a=\frac{1}{2}$.

L'axe de symétrie de cette parabole est la droite (verticale) d'équation $\left(x=\frac{1}{2}\right)$... remarquons que le sommet S est sur cette droite.