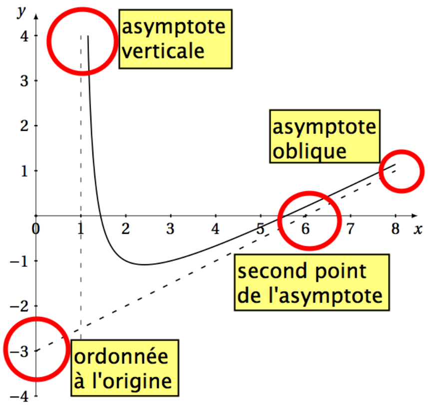
1. Savoir lire une limite sur une courbe

Sur la courbe :



Document 1 : courbe $\mathscr{C}_f$

- au point d'abscisse 1 :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

donc une asymptote verticale $x = 1$
- à droite :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

et nous lisons une asymptote oblique dont nous écrivons l'équation à partir de l'ordonnée à l'origine (0 ; -3) :

$$y = mx - 3$$

puis en cherchant m à partir du second point (6 ; 0) lu :

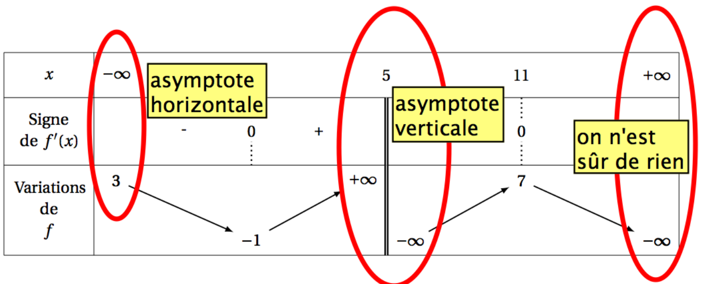
$$0 = m \times 6 - 3 \quad \text{donc} \quad m = 0.5$$

et finalement l'équation de l'asymptote oblique :

$$y = 0.5x - 3$$

2. Savoir lire une limite sur un tableau de variations

Sur la courbe :



Document 2 : tableau de variations de f

- à gauche : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$
- au centre :

  $\lim_{x \to 5,\, x<5} f(x) = +\infty$

  et

  $\lim_{x \to 5,\, x>5} f(x) = -\infty$
- à droite : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Savoir lire une asymptote sur un tableau de variations

- à gauche, la droite $y = 3$ est une asymptote horizontale (c'est un *plafond* pour la courbe),
- au centre, la droite $x = 5$ est une asymptote verticale (double barre, valeur impossible),
- à droite, on ne peut rien dire sur l'existence ou non d'une asymptote.

4. Savoir déterminer l'existence d'une solution d'équation $f(x) = k$

- sur l'intervalle $]-\infty; 1]$, la fonction est décroissante de 3 (non compris, c'est une limite) à 1, la valeur 3 n'est pas dans cet intervalle et il y a aucune solution de l'équation demandée,
- sur l'intervalle $[1; 5[$, la fonction est croissante de -1 à $+\infty$, elle passe donc par la valeur 3 et il y a une solution de l'équation demandée,
- sur l'intervalle $]5; 11]$, la fonction est croissante de $-\infty$ à 7, elle passe donc par la valeur 3 mais on ne sait pas si c'est pour x «après» 10 ou «avant»... donc on ne peut affirmer qu'il y a une solution.

Sur l'intervalle $[1; 10]$, il n'y a donc qu'une solution certaine de l'équation.

5. Savoir calculer une limite à l'infini de polynôme

Nous utilisons le théorème de cours sur les limites à l'infini d'un polynôme. Le terme de plus haut degré de $f(x) = -5x^3 + 3x^2 + 1\,500$ est $-5x^3$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -5x^3 = -\infty$$

6. Savoir calculer une limite à l'infini de quotient de polynômes

Nous utilisons le théorème de cours sur les limites à l'infini d'un quotient de polynômes. Le quotient des termes de plus haut degré de $f(x)$ est $\dfrac{-5x^3}{5x^4} = -\dfrac{1}{x}$ et l'inverse d'un très grand nombre est un nombre très proche de zéro donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

7. Savoir calculer une limite en un point

Nous constatons que $f(2)$ est une valeur impossible à calculer car le dénominateur de f est alors nul. Pour $x = 2$, le numérateur vaut $-4+1=-3$, il est négatif. Pour x très proche de 2 mais inférieur à 2, $x-2$ est très proche de zéro mais inférieur à zéro donc négatif. Diviser un nombre négatif (-3) par un nombre négatif très proche de zéro donne un très grand nombre positif.

$$\lim_{x\to 2,\, x<2} f(x) = +\infty$$

8. Savoir démontrer l'existence d'une asymptote oblique

La fonction f est de la forme $f(x) = g(x) + h(x)$
- avec $g(x) = -3x+2$ qui est une fonction affine
- et $h(x) = -\dfrac{3}{x}$ qui est une fonction vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

D'après le théorème de cours, la droite d'équation $y = -3x+2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

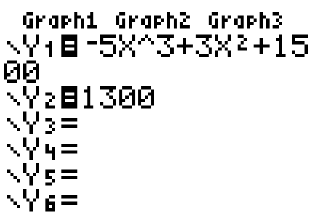
9. Savoir démontrer la position de l'asymptote par rapport à la courbe

La fonction f est de la forme $f(x) = g(x) + h(x)$ et nous avons montré que sa courbe admet une asymptote en $+\infty$. La fonction $h(x) = -\dfrac{3}{x}$ est négative pour x positif donc en particulier vers $+\infty$.
Par conséquent, $f(x) - g(x) < 0$ soit encore $f(x) < g(x)$: la courbe est sous l'asymptote.

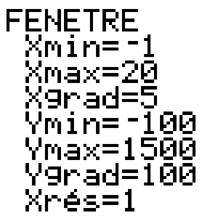
10. Savoir calculer numériquement une solution d'équation $f(x) = k$

Mieux qu'un long raisonnement, les écrans :

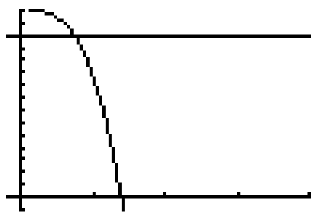
les fonctions



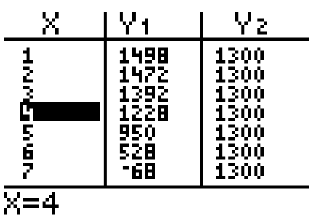
la fenêtre



les courbes

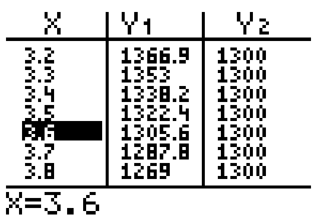


une première table



le réglage

la seconde table



Conclusion : l'arrondi au dixième de la solution de l'équation $f(x) = 1300$ est $x = 3{,}6$.