APPROXIMATION AFFINE D'UNE FONCTION

Niveau d'enseignement : Classe de Première S.

Type d'activité : T.P. en salle d'informatique.

Durée : Deux séances d'une heure.

Matériel : Salle équipée d'ordinateurs pour travail individualisé ou par binôme.

Logiciels : GeoGebra, wxMaxima, OOo

Fichiers :
- ces fiches : tpapproxaffine.pdf, tpapproxaffine.tex,
- le fichier OOo : tpapproxaffine.ods

Objectifs :
- aborder la notion d'approximation affine d'une fonction,
- construire la pratique de wxMaxima,
- développer la pratique de compte-rendus de TP.

Contexte : Les ordres de grandeur (Leibniz adapté) ont été abordés en cours, de même que la notions de nombre dérivé.

Apports attendus :
- lier la notion de nombre dérivé à la tangente à la courbe,
- permettre un usage autonome de wxMaxima,
- sensibiliser au calcul numérique.

Commentaires : Dans cette activité, nous partons d'une représentation graphique de la parabole avec une tangente afin d'en examiner des aspect numériques et différentiels. Nous construisons, de façon légère mais non superficielle, l'idée que la tangente nous donne une approximation simple de la fonction dans le voisinage d'un point, la notion de voisinage étant vue à la fois au sens de *très proche* (ordres de grandeur) et de faible distance numérique.

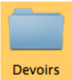
FICHE DU PROFESSEUR

Il n'y a rien qui ne soit explicite.

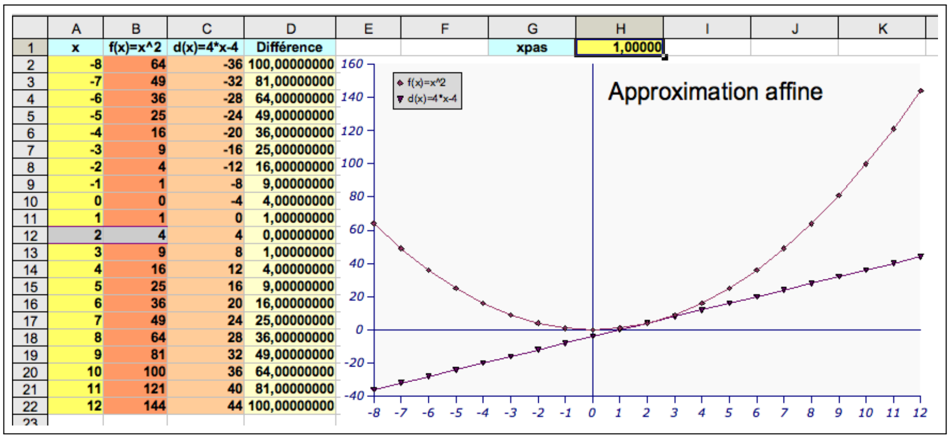
Objectifs

Nous allons étudier comment déterminer une approximation simple d'une fonction près d'un point.

Première étape : observer



Ouvrir la feuille « approxaffine.ods »(OOo-calc) dans le dossier *Devoirs* et l' **Enregistrer sous** le nom « approxaffine_mesinitialesàmoi ».



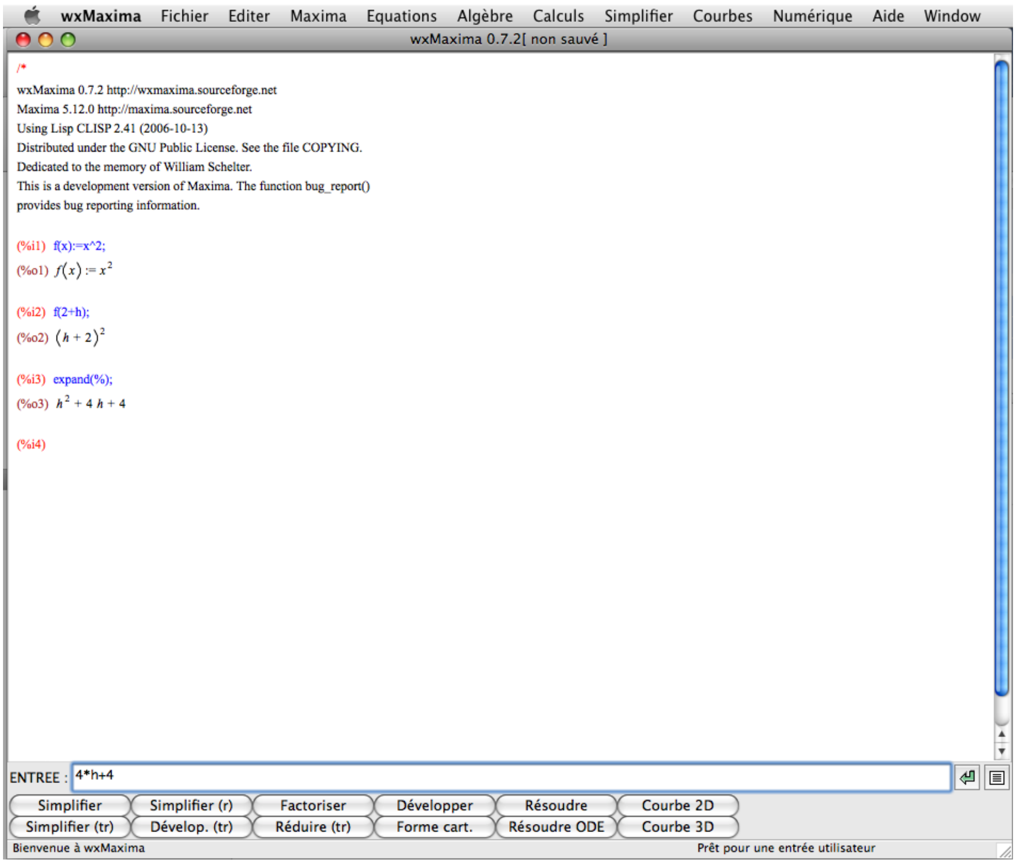
x	f(x)=x^2	d(x)=4*x-4	Différence
-8	64	-36	100,00000000
-7	49	-32	81,00000000
-6	36	-28	64,00000000
-5	25	-24	49,00000000
-4	16	-20	36,00000000
-3	9	-16	25,00000000
-2	4	-12	16,00000000
-1	1	-8	9,00000000
0	0	-4	4,00000000
1	1	0	1,00000000
2	4	4	0,00000000
3	9	8	1,00000000
4	16	12	4,00000000
5	25	16	9,00000000
6	36	20	16,00000000
7	49	24	25,00000000
8	64	28	36,00000000
9	81	32	49,00000000
10	100	36	64,00000000
11	121	40	81,00000000
12	144	44	100,00000000

1/ Qu'indique la zone grisée ? Définir la nature de la fonction notée d(x) ? Que montre la représentation graphique ? Relever les réponses dans le fichier de compte-rendu (OOo-writer).

2/ Faire varier le pas de l'abscisse ($x$pas) en observant la représentation graphique et la colonne différence : 1 puis 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}. Relever le constat.

Seconde étape : calculer

Ouvrir wxMaxima.

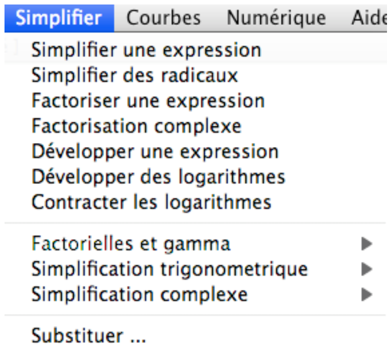


Définir la fonction f dans la ligne de saisie en écrivant f(x) :=x^2 et valider.

Repérer les barres « stratégiques » :

- en haut **Algèbre** **Calculs** **Simplifier**
- en bas **Simplifier** **Factoriser** **Développer** **Résoudre**

- Premier ouvrage



  ∗ Développer puis Simplifier $f(2+h)$.
    Que vaut la partie affine du résultat ?
  ∗ Recopier cette partie affine et
    Substituer *h avec* $x-2$ (menu Simplifier déroulant)
    puis Développer et Simplifier .
  ∗ Vérifier que l'expression obtenue est égale à $\mathrm{d}(x)$.

- Second ouvrage
  ∗ Écrire dans la ligne de saisie : define('fp(x),diff(f(x),x))...
    nous avons ainsi défini la fonction dérivée de f : *fp*
  ∗ Écrire dans la ligne de saisie : y-f(2)=fp(2)*(x-2)
  ∗ Développer l'expression obtenue et Résoudre l'expression obtenue pour la variable y.
  ∗ Vérifier que l'expression obtenue est égale à $\mathrm{d}(x)$.

  Nous disposons désormais de deux méthodes de calcul pour obtenir l'expression de $\mathrm{d}(x)$.

- Troisième ouvrage
  ∗ Reprendre les calcul précédents avec l'abscisse -1. Que vaut la nouvelle expression $\mathrm{d}_g(x)$?
  ∗ Dans la feuille de calcul OOo-calc, modifier l'abscisse grisée en -1 et modifier de C2 à C22 pour retrouver une représentation de même nature que la précédente. Copier-coller cette représentation graphique dans le compte-rendu.
  ∗ Vérifier, en faisant varier $x$pas, que la propriété observée est bien vérifiée.

Troisième étape : démontrer

1/ Que vaut la différence $\Delta = f(2+h) - d(2+h)$ pour $h = 10^{-3}$.

2/ Démontrer que $f(2+h) \approx \mathrm{d}(2+h)$ pour h *tp*.

3/ Pour quel réel (*md*) maximal h la différence Δ vérifie-t-elle $\Delta \leqslant 10^{-5}$?

4/ Déterminer, par une méthode au choix, l'expression de $\mathrm{d}_g(x)$ pour $g(x) = x^3$ au point d'abscisse 2.

5/ Que vaut la différence $\Delta_g = g(2+h) - \mathrm{d}_g(2+h)$ pour $h = 10^{-3}$.

6/ Démontrer que $g(2+h) \approx \mathrm{d}(2+h)$ pour h *tp*.

Conclusion provisoire

Approcher une fonction quelconque par un polynôme, c'est l'un des objets d'un domaine de la théorie mathématique : le calcul numérique. Nos calculatrices et ordinateurs utilisent des algorithmes de calcul qui sont issus des travaux accomplis par des mathématiciens dans ce domaine. La fonction affine est le plus simple des polynômes d'approximation.

Ci-dessous, l'approximation de $\sin(x)$ par $\mathrm{P}(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ près de zéro.