Première observation

1/ Nombre d'intersections de S et de $\mathscr{C}$ suivant la valeur du paramètre p.

Le tableau suivant donne le nombre d'intersections suivant la valeur de p :

p	$-4 \leqslant p < -1$	-1	$-1 < p \leqslant 2$
intersection(s)	aucune	1 seule	deux

2/ Nombre d'intersections de Q et de $\mathscr{C}$ suivant la valeur du paramètre m.

Le tableau suivant donne le nombre d'intersections suivant la valeur de p :

m	$-4 \leqslant m < 2$	2	$2 < m \leqslant 2$
intersection(s)	deux	1 seule	deux

3/ Déduction :

la droite T a pour équation $y = 2x - 1$, elle n'a qu'une seule intersection avec la courbe : c'est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Première réflexion

1/ Nous cherchons à déterminer le nombre d'intersections de S et $\mathscr{P}$, nous cherchons donc le nombre de solutions de l'équation $x^2 = 2x + p$ ou encore $x^2 - 2x - p = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4p$.

- $p = 1$: $x^2 = 2x + 1$ ou encore $x^2 - 2x - 1 = 0$; le discriminant vaut 8, il y a donc deux intersections.
- $p = -1$: $x^2 = 2x - 1$ ou encore $x^2 - 2x + 1 = 0$; le discriminant vaut 0, il y a donc une seule intersection.
- $p = -3$: $x^2 = 2x - 3$ ou encore $x^2 - 2x + 3 = 0$; le discriminant vaut -8, il n'y a donc aucune intersection.

2/ Nous cherchons à déterminer le nombre d'intersections de Q et $\mathscr{P}$, nous cherchons donc le nombre de solutions de l'équation $x^2 = m(x-1) + 1$ ou encore $x^2 - mx + m - 1$ dont le discriminant vaut $m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4$.

- $m = 0$: $x^2 = 1$ ou encore $x^2 + 1 = 0$; le discriminant vaut 4, il y a donc deux intersections.
- $m = 2$: $x^2 = 2x - 1$ ou encore $x^2 - 2x + 1 = 0$; le discriminant vaut 0, il y a donc une seule intersection.
- $m = 3$: $x^2 = 3x - 2$ ou encore $x^2 - 3x + 2 = 0$; le discriminant vaut 1, il y a donc deux intersections.

3/ Nous avons vu que l'équation $x^2 = 2x - 1$ n'a qu'une seule solution donc la parabole et cette droite n'ont qu'un point d'intersection. De plus, si $x = 1$ alors $1^2 = 2 \times 1 - 1$ donc le point M (1 ; 1) est ce point d'intersection. La droite est donc la tangente à la courbe en ce point d'abscisse 1.

Seconde observation

Dans la colonne de gauche de GeoGebra, on peut par exemple lire pour $a = -2$ que l'équation de T est $2x + 0{,}5y = -2$. De cette équation on «tire» : $y = -4x - 4$ et l'on voit que le coefficient directeur vaut -4. Le relevé des valeurs successives (en tableau) semble nous montrer (a priori de façon quasi exacte) que le coefficient directeur de T est le double de la valeur de l'abscisse a.

Conclusion

Le travail que nous avons fait depuis confirme les observations : si $f(x) = x^2$, nous savons que $f'(a) = 2a$ et que l'équation de la tangente en $a = 1$ peut s'écrire $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.