EXERCICE 1 **5 points**

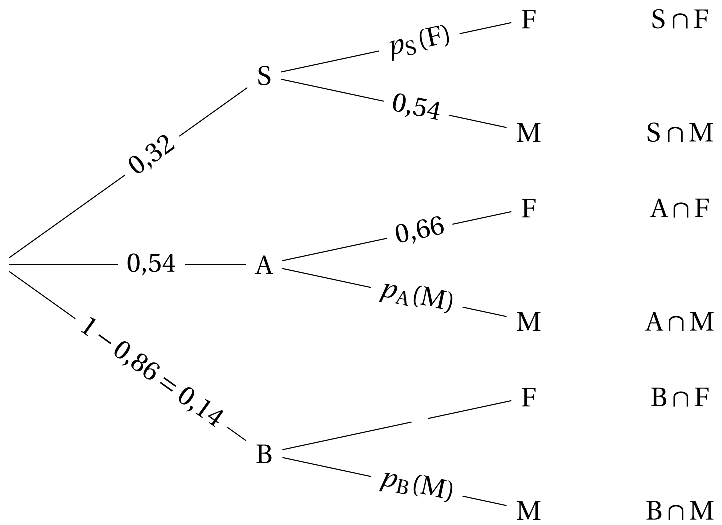
1/ **a/** L'énoncé nous dit que :

- 32 % des chatons sont des Siamois : $p(\text{S}) = 0{,}32$
- 54 % des chatons sont des Abyssins : $p(\text{A}) = 0{,}54$
- et le reste est constitué de Birmans : $p(\text{B}) = 1 - \big(p(\text{A}) + p(\text{S})\big) = 0{,}14$

De plus :

- parmi les Siamois, 54 % sont des mâles : $p_{\text{S}}(\text{M}) = 0{,}54$
- 66 % des Abyssins sont des femelles : $p_{\text{A}}(\text{F}) = 0{,}66$
- il y a au total 40,96 % de chatons mâles : $p(\text{M}) = 0{,}4096$

b/ L'arbre pondéré modélisant la situation :



2/ **a/** D'après l'arbre, $p(\text{M} \cap \text{A}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{M}) = 0{,}32 \times (1 - 0{,}66) = 0{,}1836$. C'est la probabilité que Pierre ait acheté un mâle Abyssin.

b/ La probabilité que Pierre ait acheté un chaton mâle Siamois est $p(\text{M} \cap \text{S}) = 0{,}32 \times 0{,}54 = 0{,}1728$.

c/ La probabilité que Pierre ait acheté un chaton mâle Birman est :

$p(\text{B} \cap \text{M}) = p(\text{M}) - \big(p(\text{S} \cap \text{M}) + p(\text{A} \cap \text{M})\big) = 0{,}4096 - (0{,}32 \times 0{,}54 + 0{,}54 \times 0{,}34) = 0{,}0532$.

d/ Dans le sous-univers des chatons Birmans, la probabilité d'avoir un mâle est :

$$p_{\text{B}}(\text{M}) = \frac{p(\text{B} \cap \text{M})}{p(\text{B})} = \frac{0{,}0532}{0{,}14} = 0{,}38.$$

EXERCICE 4 **5 points**

1/ La limite de la fonction f en $+\infty$ est 1 :

Faux car *l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en* $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2/ $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$:

Faux car $\overrightarrow{\text{CD}}$: $(2\,;\,-4)$ donc la tangente (CD) a pour coefficient directeur $\dfrac{-4}{2} = -2 = f'(0)$.

3/ Pour tout x de l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) \leqslant 0$:

Vrai car *la fonction est décroissante sur l'intervalle* $[-2\,;\,+\infty[$.

4/ Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,+\infty[$, alors la fonction F est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$:

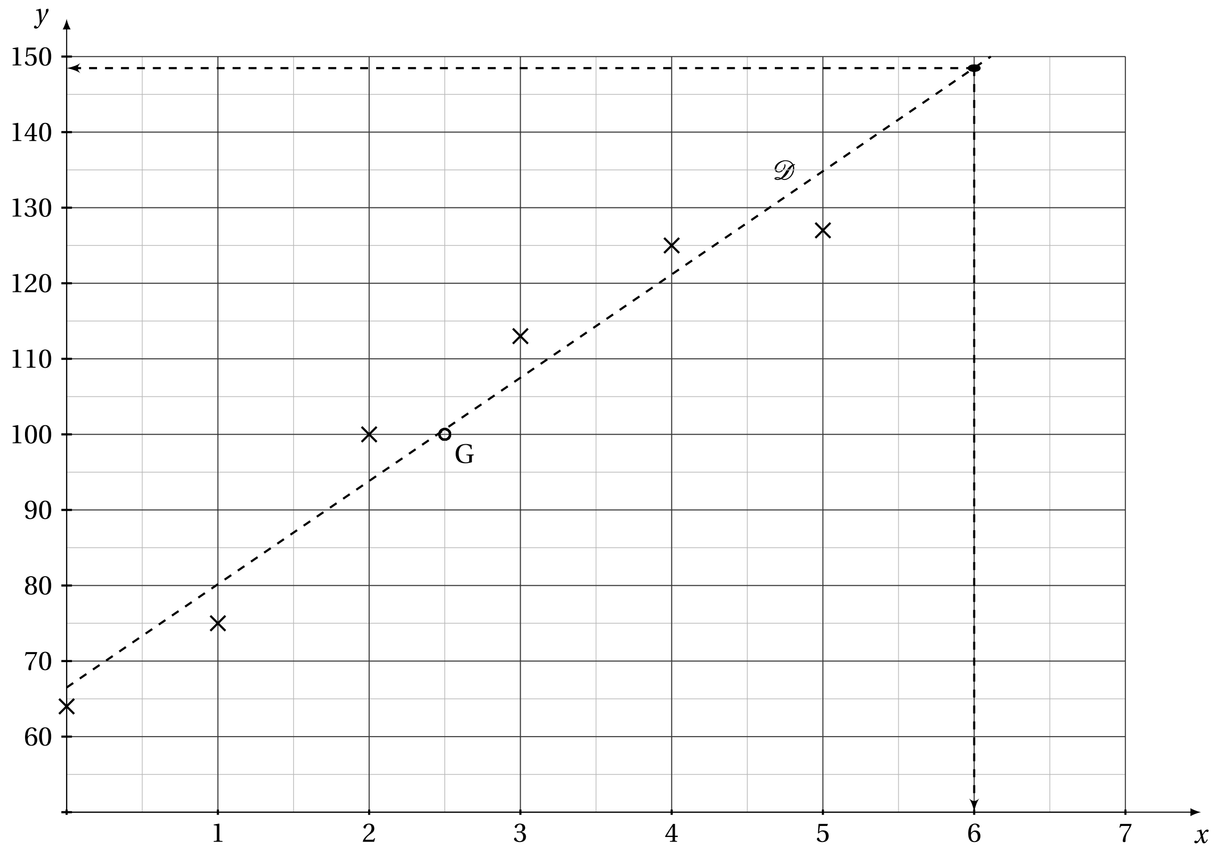
Faux car la fonction f est positive sur $[-2\,;\,+\infty[$ donc sa primitive est croissante sur cet intervalle.

5/ $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 15$:

Vrai car l'aire sous la courbe entre -2 et 0 compte moins de 15 carreaux d'une unité d'aire chacun.

EXERCICE 2 **4 points**

1/ **a/** Le nuage et la droite :



b/ Coordonnées du point moyen G : (2,5 ; 100,7).

2/ Première approximation.

a/ Les coefficients de la droite de régression linéaire : $a = 13{,}66$; $b = 66{,}52$ donc $y = 13{,}66\,x + 66{,}52$

b/ Voir sur le graphique.

c/ En 2007, $x = 6$ donc $y = 13{,}66 \times 6 + 66{,}52 \approx 148{,}5$ k€ .

3/ Deuxième approximation : $f(6) = 129$ k€ .

4/ Une hausse de 0,9% donc un bénéfice prévisible pour 2007 de $127 \times 1{,}009 = 128{,}143$; soit 128,14 k€ . La meilleure prévision (la plus proche) est donnée par le deuxième modèle.

EXERCICE 3 **6 points**

1/ **a/** Calcul de la fonction dérivée :

fonction	dérivée
$-x^2 + 10x - 9$	$-2x + 10$
$-8\ln(x)$	$\dfrac{-8}{x}$
$f(x)$	$f'(x) = -2x + 10 - \dfrac{8}{x} = \dfrac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$

Or $-2(x-1)(x-4) = -2x^2 + 10x - 8$ donc l'égalité est prouvée.

b/ Tableau de signe de $f'(x)$ (nous savons que le dénominateur x est positif) :

x	1		4		6
$x-1$	0	+		+	
$x-4$		$-$	0	+	
$\dfrac{-2(x-1)(x-4)}{x}$	0	+	0	$-$	

On peut aussi souligner que le numérateur est une fonction polynôme de degré 2 avec $a=-2$ donc négatif ce qui signifie que la parabole est orientée vers les x négatifs, d'où le tableau de signe.

c/ Tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;6]$:

x	1		4		6
$f'(x)$	0	+	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	3,9	↘	0,7

$$f(4)\approx 3{,}9096 \quad \text{et} \quad f(6)\approx 0{,}6659$$

d/ D'après le tableau de variations, le bénéfice mensuel maximal de 39 096 euros est obtenu pour une production de 400 pièces.

2/ a/ Pour prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x)=x\ln(x)-x$$

est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, nous dérivons $g(x)$:

$$g(x)=1\ln(x)+x\frac{1}{x}-1=\ln(x)$$

Et nous constatons qu'en effet $g'(x)=\ln(x)$.

b/ Une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;6]$:

primitive	fonction
$-\frac{1}{3}x^3+5x^2-9x$	$-x^2+10x-9$
$-8\,g(x)$	$-8\ln(x)$
$\mathrm{F}(x)=-\frac{1}{3}x^3+5x^2-9x-8\,g(x)$	$f(x)$

donc

$$\mathrm{F}(x)=-\frac{1}{3}x^3+5x^2-x-8x\ln(x)$$

c/ La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;6]$:

$$\frac{1}{6-1}\int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\big(\mathrm{F}(6)-\mathrm{F}(1)\big)\approx 2{,}5$$